Orgaan van de

Nederlandse Vereniging

van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 72

1996-1997 nov./dec.

3

Dynamische systemen

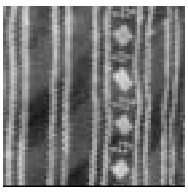
Wereldrecord getallen kraken met behulp van World Wide Web

Oproep nieuwe redactieleden

Inhoud


120


124


137

Op de jaarvergadering 1993 van de NVvW werd besloten een fonds in het leven te roepen om het wiskundeonderwijs in de Derde Wereld te ondersteunen door financiële bijdragen aan een nader te bepalen project. Een tweede minstens zo belangrijk doel was wiskundedocenten 'hier' te laten zien dat er 'daar' ook collega's zijn die zich met soortgelijke vragen en problemen bezig houden als zij. Dat wiskundeonderwijs niet ophoudt bij de grenzen van Nederland of de westerse wereld. Het volgende artikel is het derde en laatste uit een serie ontdekkingsreizen naar dat onderwijs 'daar'.

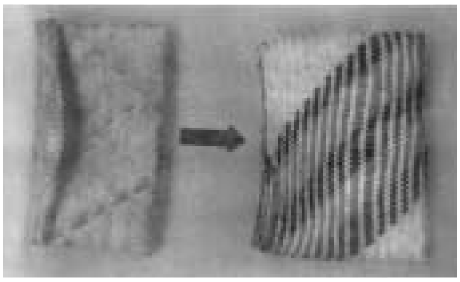
Wiskunde-onderwijs in de Derde Wereld (deel 3)

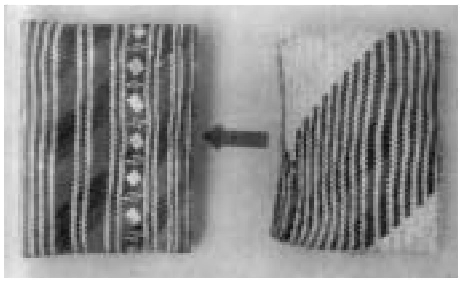
Hans Wisbrun

Iedere cultuur bouwt wiskunde, dat is kort samengevat het uitgangspunt van de stroming binnen de wiskundedidactiek die met Etnomathematica wordt aangeduid. Het onderwijs binnen een bepaalde cultuurgroep zou (mede) gebruik moeten maken van de eigen ontstaansgeschiedenis van de wiskunde. Met name in Derde Wereldlanden kan deze benadering een interessant alternatief bieden voor de manier waarop de wiskunde daar doorgaans wordt onderwezen, namelijk als import-artikel uit de westerse wereld. In dit artikel wordt, bij wijze van voorbeeld, een concrete uitwerking van dit idee gegeven, zoals beschreven door Paulus Gerdes en Gildo Bulafo [1]). Dat dit voorbeeld uit Moçambique komt is niet toevallig, omdat ik daar zelf enige jaren gewerkt heb. Op het einde van dit artikel komt nog een kritische discussie naar aanleiding van het beschreven voorbeeld en een terugblik op de hele serie artikelen over wiskundeonderwijs in de Derde Wereld.

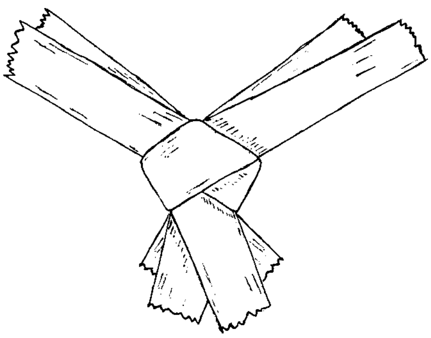
Sipatsi

Sipatsi (enkelvoud: gipatsi) zijn gevlochten portefeuilles, zoals die in een bepaalde provincie van Moçambique, Inhambane, worden gemaakt. Ze worden gebruikt voor het bewaren en meenemen van munten en persoonlijke documenten. Een gipatsi bestaat uit drie delen die in elkaar passen:



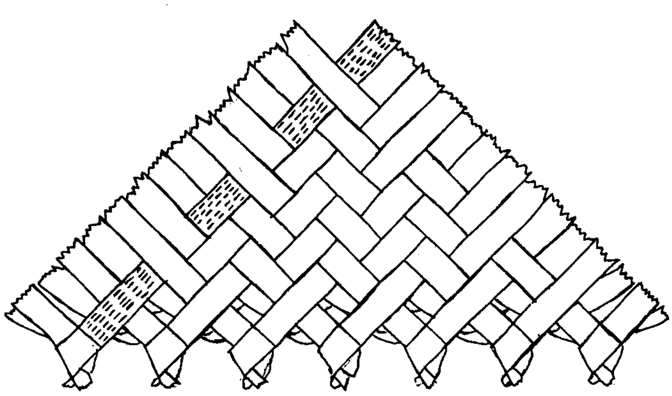


Sipatsi worden gevlochten uit het blad van een bepaald type palmboom. Dat blad wordt eerst met een soort naald in strengen van gelijke breedte verdeeld. Het vlechtwerk begint met het maken van knopen



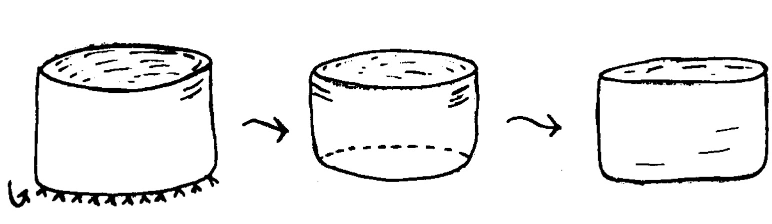
afbeelding 2

In iedere knoop komen twee paar strengen samen. Vervolgens worden de knopen aan elkaar verbonden door de uiteinden aan de bovenkant met elkaar te vervlechten, meestal volgens het principe ‘twee erboven, twee eronder’. De strengen aan de onderkant van de knopen worden er afgeknipt:



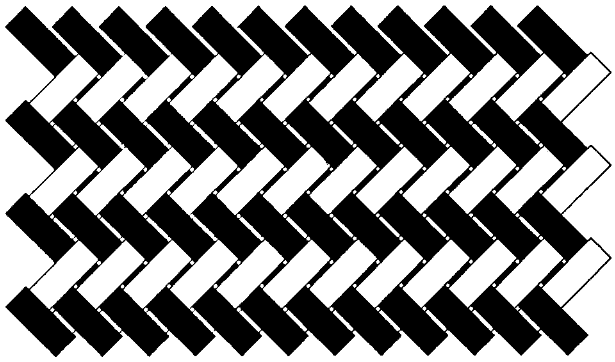
afbeelding 3

Op deze manier onstaat een soort matje. Nu wordt een tweede matje gemaakt, met hetzelfde aantal knopen. Het tweede matje wordt een halve slag gedraaid en de uitstekende strengen van beide matjes worden met elkaar verweven en zo onstaat een cilinder. Dan worden de knopen naar binnen gevouwen en wordt de cilinder geplet:



afbeelding 4

De onderkant wordt nu vastgenaaid en de bovenkant afgezoomd. Een gipatsi bestaat uit drie van deze geplette cilinders, die iets verschillen in maat en daardoor in elkaar passen.
Door bij de knopen strengen van verschillende kleuren te gebruiken kunnen sipatsi versierd worden. We noemen het ene paar strengen wit (in feite: de natuurlijke kleur van de strengen) en het andere paar zwart (in feite: groen, paars, donkerblauw, enzovoort). De witte strengen maken een hoek van 45° met de onderkant, de zwarte een hoek van 135°. In de meest eenvoudige vorm ontstaat zo een patroon als in afbeelding 5.



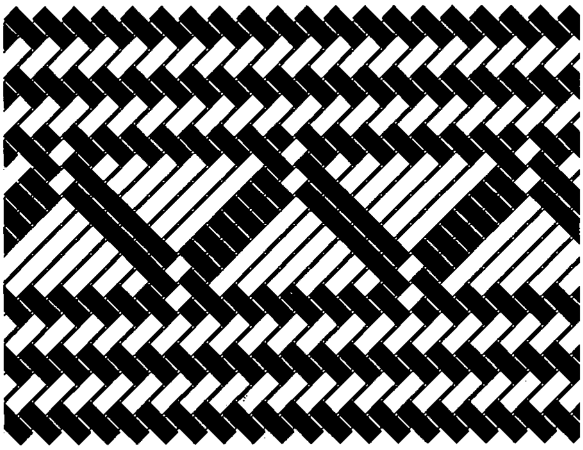
afbeelding 5

Door variaties in het vlechtpatroon kunnen allerlei verschillende decoratiestroken gemaakt worden. Afbeelding 6 is een voorbeeld.

Waar zit nu de wiskunde van deze sipatsi? Wat voor mogelijkheden biedt deze traditionele ambachtelijke techniek voor het wiskundeonderwijs in Moçambique? Het zal de lezer van dit blad al duidelijk zijn, dat er bijvoorbeeld rekenkunde verborgen zit in de vervaardiging van sipatsi. Zo is er een verband tussen het aantal knopen van een gipatsi en de verschillende decoratiestroken die mogelijk zijn. Ik denk niet dat de sipatsi-makers dat verband zelf zouden kunnen verwoorden, maar de praktijk van het vlechten zal hen zeker een aantal ervaringsregels hebben geleerd. Leerlingen nemen die regels van huis mee als zij naar school gaan en dat zou een aanknopingspunt voor wiskundeonderwijs kunnen zijn.
Hieronder volgt een uitwerking van dit idee, zoals door Paulus Gerdes gebruikt wordt op de universitaire lerarenopleiding in Maputo. Er staan vragen bij, dus u wordt bij deze ook zelf uitgedaagd.

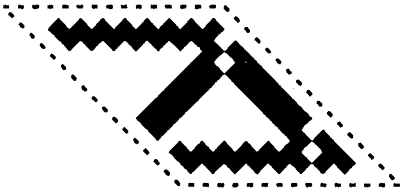
Sipatsi en rekenen

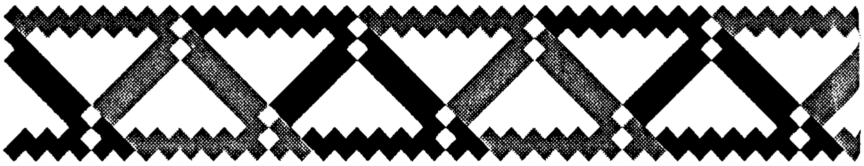
Een decoratiestrook [2]) van een gipatsi bestaat uit een motief dat een aantal malen herhaald wordt. In afbeelding 7 staat zo’n strook, met het daarbij behorende motief.



afbeelding 6

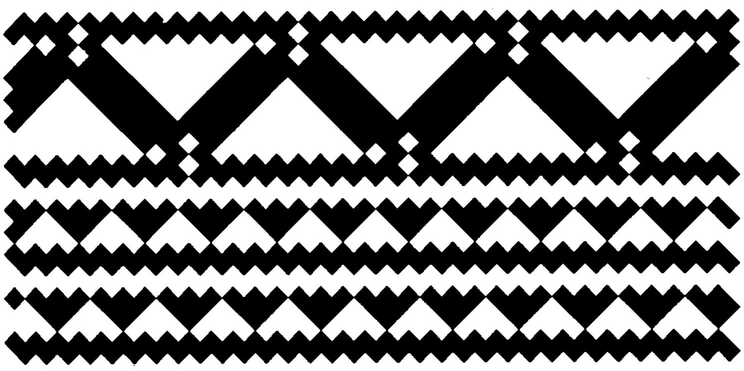
Voor de duidelijkheid zijn nu geen individuele strengen meer getekend.





afbeelding 7

De strook loopt aan beide kanten van de gipatsi. Wiskundig uitgedrukt: op papier loopt de strook oneindig ver naar links en naar rechts door.
Je kunt zeggen dat elk motief een *periode* heeft. Zo heeft het hierboven getekende motief een periode 8. Die 8 is ook het aantal gekleurde strengen dat nodig is om het betreffende motief te maken.
Als een motief met periode p een geheel aantal keren op een gipatsi past, dan betekent dat, dat tevens het totaal aantal gekleurde strengen van die gipatsi, T, een veelvoud van p is. Bovendien moet het totaal aantal gekleurde strengen T een veelvoud van 4 zijn: uit iedere knoop komen twee gekleurde strengen en het aantal knopen is altijd even (omdat een gipatsi bestaat uit twee gelijke kanten).
Dus T moet een veelvoud van p èn van 4 zijn. Bij een periode van bijvoorbeeld 9, betekent dat, dat T een veelvoud van 36 is. Als er verschillende motieven met verschillende perioden, p_i, gebruikt worden, dan moet T een veelvoud zijn van alle p_i èn van 4. Als dat niet het geval is, dan zitten er onregelmatigheden in het patroon en dat wordt als gebrek aan kwaliteit gezien.
Vragen die naar aanleiding hiervan gesteld kunnen worden zijn:
- Sipatsi-makers gebruiken vaak 24 knopen voor elke kant van een gipatsi. Kun je een reden bedenken voor die keuze?
- Op sipatsi komen vaak motieven voor met een periode 8. Wat betekent die keuze voor het aantal knopen aan iedere kant van een gipatsi?
- Bekijk het onderstaande gedeelte van een gipatsi (afbeelding 8). Wat kun je zeggen over het totale aantal knopen dat voor de hele gipatsi nodig is?



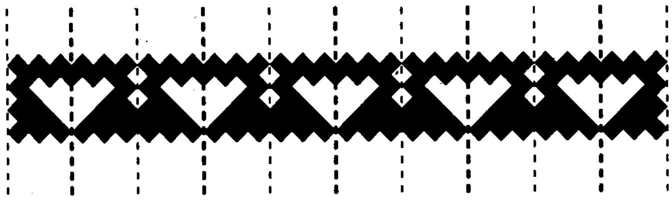
afbeelding 8

Sipatsi en symmetrie

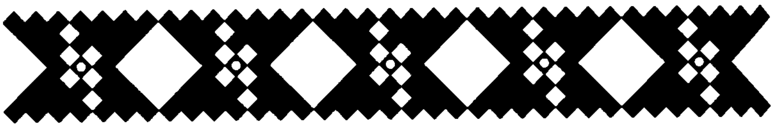
In gipatsi-patronen zijn allerlei vormen van symmetrie te onderscheiden. Op de volgende pagina staan drie voorbeelden.

Dit geeft aanleiding tot vragen als:
- Een patroon heeft zowel horizontale als verticale spiegelsymmetrie. Moet het dan ook (180°-) draaisymmetrie hebben?
- Een patroon heeft zowel verticale spiegelsymmetrie als (180°-) draaisymmetrie. Moet het dan ook horizontale spiegelsymmetrie hebben?
- Een patroon heeft zowel horizontale spiegelsymmetrie als (180°-) draaisymmetrie. Moet het dan ook verticale spiegelsymmetrie hebben?

afbeelding 9 Horizontale symmetrie-as

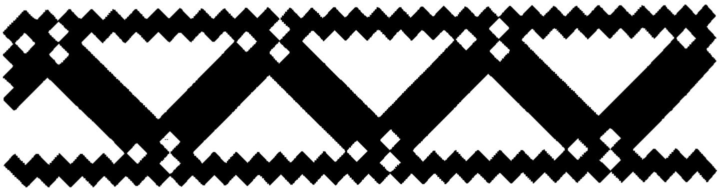


afbeelding 10 Verticale symmetrie-assen



afbeelding 11 Draaisymmetrie

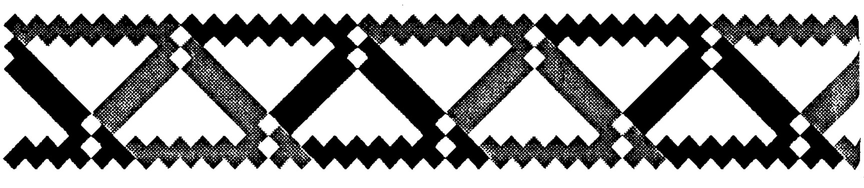
Ook ‘schuifspiegelsymmetrie’ (’voetsporen-symmetrie’ is op leerlingenniveau misschien een duidelijker woord) komt op sipatsi voor.



afbeelding 12

Theoretisch zijn er voor decoratiestroken zeven symmetrie-klassen mogelijk. Sipatsi-vlechters blijken inderdaad decoratiestroken uit alle zeven klassen te ontwerpen.
Een hieruit voortvloeiende vraag voor wiskundeonderwijs is bijvoorbeeld:

- Ontwerp uit iedere klasse één of meer gipatsi-patronen.



afbeelding 13

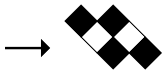
Sipatsi en combinatoriek

Aan een gipatsi-motief kun je dimensies toekennen. De grondvorm van zo’n motief is een gekarteld parallellogram, bestaande uit hokjes, die al dan niet gekleurd zijn. Onderstaand motief heeft dimensies van 8 bij 13, waarbij de eerste dimensie overeenkomt met de periode *p*, en de tweede de ‘diagonale hoogte’ *d* is.

Alle decoratiestroken zijn visueel afgescheiden van de ‘witte’ delen erboven en eronder en hebben dus een ‘zwarte’ rij boven en onder. De overblijvende hokjes kunnen ‘zwart’ of ‘wit’ zijn.

- Hoeveel verschillende gipatsi-patronen bestaan er nu bijvoorbeeld met een motief van 2 bij 3?

De bovenste en onderste rij bestaan in ieder geval uit zwarte hokjes.
De enige vrijheid zit in de rij in het midden:



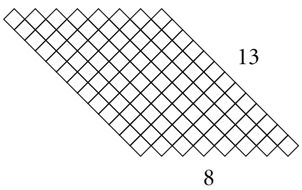
afbeelding 14

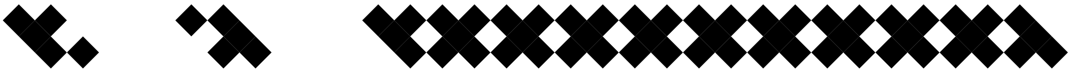
Daarvoor zijn voor het motief in principe vier mogelijkheden, symbolisch aangeduid met zz, zw, wz, ww. Als de hokjes dezelfde kleur hebben (zz of ww), dan ‘degradeert’ het motief tot een motief van 1 bij 3:

afbeelding 15

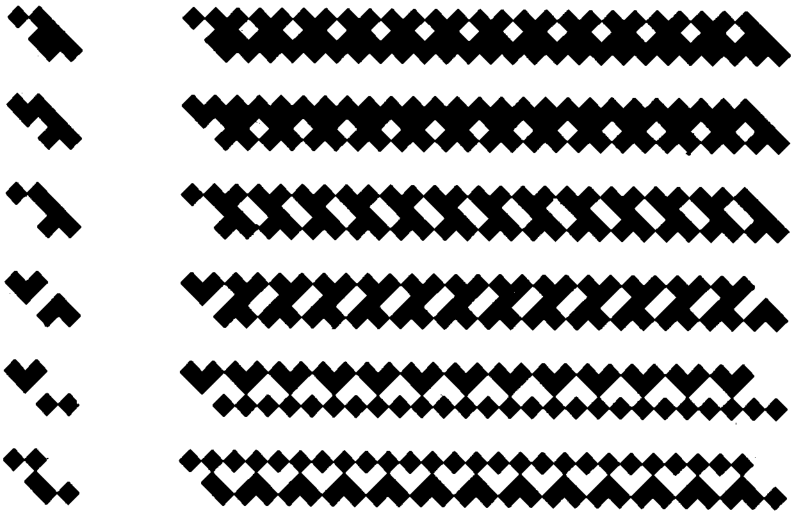
Hebben de hokjes een verschillende kleur, dan zijn er voor het motief nog twee mogelijkheden (zw en wz). Maar beide mogelijkheden leiden tot hetzelfde patroon. (afbeelding 16)

Dus in feite is er maar één patroon dat hoort bij een motief met dimensies 2 bij 3.
In afbeelding 17 staan de zes verschillende gipatsi-patronen die gevormd kunnen worden door een motief van 2 bij 4.





afbeelding16



afbeelding17

Hieraan zouden bijvoorbeeld de volgende vragen gekoppeld kunnen worden.

- Vind alle verschillende gipatsi-patronen met een motief van 3 bij 3.
- Hoeveel gipatsi-patronen bestaan er met een motief van 3 bij 4? Zou je dat aantal ook kunnen vinden zonder te tekenen?
- Kun je een formule vinden voor het aantal gipatsi-patronen met een motief van *p* bij *d*?

Discussie

Zoals hierboven geschetst, vormen sipatsi een aanknopingspunt voor zo uiteenlopende onderwerpen als rekenen, meetkunde en combinatoriek. In didactische zin kunnen we dus spreken van een rijke context. Daarbij komt dat iedere Moçambikaan ze kent. Op de markt zijn ze gemakkelijk verkrijgbaar. Veel leerlingen zullen ooit gezien hebben hoe ze worden vervaardigd. Een deel zal ook de elementaire vlechtregels van huis uit hebben meegekregen. Sipatsi behoren daarom zeker tot de belevingswereld van Moçambikaanse leerlingen. Daar vormen ze mijns inziens een beter startpunt voor wiskundeonderwijs dan stadsplattegronden, dienstregelingen of bedrijfslogo's, om maar eens een paar westerse contexten te noemen.
Nu ging het mij hierboven natuurlijk niet om het aan de man brengen van sipatsi als hèt middel om vervreemding bij Moçambikaanse leerlingen te bestrijden. Het ging om een voorbeeld, een concrete uitwerking van het gedachtengoed van de Etnomathematica. Er zijn meer contexten te vinden. En die kunnen per land, of zo je wilt per cultuur, verschillen.
Of je nu kunt zeggen dat sipatsi-vlechters wiskunde ontwikkelen, daar plaats ik een vraagteken bij. Je kunt misschien zeggen dat ze wiskundig actief zijn, in de zin dat zij iets maken, dat met wiskundige taal te beschrijven valt. Maar zelf maken zij geen gebruik van die taal. En dat is volgens mij nu juist de essentie van wiskunde: wiskundige activiteiten benoemen, expliciet maken, in taal vatten, boven de daad uittillen. Dat wordt niet door de sipatsi-makers gedaan, maar door degenen die hier wiskundeonderwijs uit halen. Bovendien blijkt die wiskunde niet een heel andere dan 'onze' wiskunde, zoals je misschien zou verwachten gezien het uitgangspunt van de Etnomathematica.
Mij kan dit trouwens weinig schelen. Wat ik zie is een rijke context, uit de eigen cultuur, waar meer wiskunde in zit dan je zo op het eerste gezicht vermoedt. Vooral uit psychologisch oogpunt lijkt het me goed dit soort contexten in te zetten bij het wiskundeonderwijs. Een aardig aspect is nog dat sipatsi uitnodigen tot 'materieel handelen', in bijvoorbeeld een wiskundewerklokaal. In ieder geval ben ik zelf aan het vlechten geslagen en daarbij kwam ik er al gauw achter dat dit een hele kunst is.
We moeten wel beseffen dat het vinden van dit soort contexten veel onderzoek met zich meebrengt. In de westerse onderwijswereld is in de loop van de jaren een hele verzameling contexten opgebouwd. Daarbij hebben ontwikkelaars uit de verschillende landen inspiratie uit elkaars vondsten geput, of zo je wilt, vondsten van elkaar gepikt. Het aantal ontwikkelaars in de Derde Wereld is echter een stuk kleiner en bovendien werken zij meestal veel meer geïsoleerd. De Etnomathematica zal het dan ook vooral moeten hebben van de kwaliteit van de gevonden contexten, en niet van de kwantiteit. Het begrip 'eigen cultuur' zou bovendien niet te eng gedefinieerd moeten worden. Ik

kan me best voorstellen dat er nauwe samenwerking op dit gebied ontstaat tussen verwante landen, bijvoorbeeld tussen de landen van Zuidelijk Afrika.
Verder moet er rekening mee gehouden worden dat de Derde Wereld in zekere zin verwestert, zeker in de grote steden. Dat betekent dat niet alle contexten uit het Westen per definitie taboe zouden moeten worden verklaard. Er zou nauwkeurig naar de achtergrond van de leerlingen gekeken moeten worden en er zou - hetzelfde geldt overigens ook voor Nederland - verscheidene contexten moeten worden aangeboden, voor elk wat wils.

Terugblik

In de drie artikelen die in deze serie geschreven zijn gaf ik een korte schets van het wiskundeonderwijs in de Derde Wereld. Daarbij lag de nadruk op Afrika, omdat ik daar zelf de meeste banden mee heb. Ook lag de nadruk op lesmateriaal en bijvoorbeeld niet op leraren en hun onderwijsactiviteiten.
In het eerste artikel [3]) beschreef ik de problematiek, waarbij ik de onderzoeken van Gay en Cole [4]) onder de Kpelle in Liberia als introductie gebruikte. Ik gaf wat voorbeelden uit Afrikaanse schoolboeken die helemaal geschreven zijn in de geest van de New Math. Het zijn bijna dezelfde boeken als die wij hier in de jaren zeventig gebruikten, met marginale aanpassingen aan de lokale situatie ('overplakken' noemde ik dat). In het tweede artikel [5]) stond een beknopt portret van 'de' leerling in de Derde Wereld. Ook gaf ik wat voorbeelden uit Afrika van wat wij hier Realistische wiskunde noemen. Dit laatste artikel concentreerde zich op een concrete uitwerking van de ideeën van de Etnomathematica, waarbij de eigen culturele wortels

Ingezonden

Alternatief voor werkblad
In nummer 72-2 (blz. 108), werkblad tafelkleed, staat een leuke variant op het experimentele examen 1992-I C/D. Als die opgaven gemaakt zijn, zodat iedere leerling zich het naaiprobleem kan voorstellen en bijvoorbeeld weet wat een zoom is, zou ik er echter, na vraag 7, een ander slot aan willen maken. Bij 9 vind je namelijk lapbreedte $127\sqrt{2} \approx 180$ cm. De lap is maar 150 cm breed, haar gewenste kleed lukt zo dus niet.

Mijn versie:
Ans heeft een lange lap van maar 150 cm breed. Ze wil daarom voor het ronde kleed een aantal gelijke sectoren uitknippen en aan elkaar naaien. De symmetrieas van een sector moet steeds, zoals in de figuur, midden op de lap komen, anders past het patroon niet mooi. Ze naait 1,5 cm van de rand, zie de stippellijntjes.

8 Bereken in cm de straal van de te knippen sectoren.
Als je geen straal vond, gebruik dan verder 123 cm.
Eerst bepaalt ze of het met 4 kwartcirkels lukt.
9 Laat zien dat deze te breed worden voor haar lap.
Ze probeert nu 6 gelijke sectoren.
10 Hoeveel graden wordt de tophoek van zo'n zesde cirkeldeel?
11 Laat zien dat deze delen wel passen.
12 Bepaal hoeveel meter stof ze voor dit kleed nodig heeft, rond af op dm.
Zouden vijf sectoren ook lukken?
13 Zoek dit uit en bepaal met hoeveel minder stoflengte ze dan toe zou kunnen, als het lukt.

De berekening met gonio van 13 is alleen D-stof, maar met tekenen op schaal, met eventueel uitknippen en opplakken, is het hele probleem prachtig op te lossen. Ik heb daarom bewust na 8 geen 'bereken' meer gebruikt om ook de tekenoplosmethode mogelijk te maken. Volgens het nieuwe programma kan de leerling 'zich bedienen van adequate onderzoeks- en redeneerstrategiën'. Ook staat op blz. 35 van de syllabus: …'Daarmee is het oplosproces nog niet voorgestructureerd… Soms wordt de keuze van een oplosweg doelbewust aan de kandidaat overgelaten'.

Na 9 kan natuurlijk ook:
10 Wat is de grootste straal voor een kwartcirkel stof die nog wel op de lap past?
11 Hoever komt het kleed dan van de grond te hangen?

Als de stof geen patroon heeft is het natuurlijk een voordelige oplossing om 2 halve cirkels tegen resp. de linker- en rechterzijkant van de stof te leggen; een mooie vraag om in een latere les te stellen, waarbij misschien meer leerlingen aan het schuiven gaan met geknipte halve cirkels?

Als u iets met deze brief doet, hoor ik graag uw ervaringen!

Agneta Aukema-Schepel, Buitenplaats 77, 8212 AC Lelystad

een inspiratiebron vormden voor aansprekend wiskundeonderwijs.

Met dank aan

Tot slot wil ik nog de volgende personen bedanken die mij bij het schrijven van deze artikelen hulp hebben geboden. Fred Pach (Amsterdam College), voor zijn commentaar op inhoud, spelling en stijl. Kees Smit, Gerard Thijs (beiden van Dienst Ontwikkelingssamenwerking, Vrije Universiteit Amsterdam), Evert van de Vrie (OU) en Ghislain Spaak (INDRAP, Niger) voor het beschikbaar stellen van materiaal.
Voor reacties houd ik me aanbevolen. Ook nodig ik u, en dan met name de lezers met Derde Wereldervaring, bij deze uit om zelf eens een artikel te schrijven. Daarin zouden weer andere aspecten van het wiskundeonderwijs in de Derde Wereld aan de orde kunnen komen.

Noten

1 *Paulus Gerdes en Gildo Bulafo*
Sipatsi The Technology, Art and Geometry in Inhambane
ISP, Maputo, Moçambique (1994)

2 *Marja Meeder en Heleen Verhage*
Regelmaat en symmetrie
Leerpakketje W12-16 (1990)

3 *Hans Wisbrun*
Wiskundeonderwijs in de Derde Wereld (deel 1)
Euclides 71-1 (1995)

4 *J. Gay en M. Cole*
The New Mathematics and an Old Culture
New York (1967)

5 *Hans Wisbrun*
Wiskundeonderwijs in de Derde Wereld (deel 2)
Euclides 71-4 (1996)

40 jaar geleden

UIT HET VERSLAG VAN DE COMMISSIE VOOR HET STAATSEXAMEN H.B.S. IN 1955
Wiskunde h.b.s. A en B

De commissie wiskunde I constateerde opnieuw, dat de hoedanigheid en de verzorging van het schriftelijke werk nog steeds onvoldoende zijn. De prestaties van vele kandidaten moesten met de cijfers 1, 2 of 3 worden gewaardeerd.
De resultaten van het mondelinge examen vallen, gelet op het onvoldoende schriftelijk werk, niet tegen.
De wenselijke parate kennis betreffende algebraïsche en goniometrische functies, grafische voorstellingen daarvan, goniometrische verhoudingen en trigonometrische formules, is veel groter dan een aantal jaren geleden. Het is de commissie opgevallen, dat een aantal kandidaten wel vrij moeilijke ongelijkheden kan oplossen, maar faalt bij de opgaven van het type $x^2 < 9$.
Ook worden de ongelijkheden $x > 9$ en $x < 3$ vaak gecombineerd tot $3 > x > 9$.
Bij de goniometrie blijkt men de rechthoekige driehoek met de zijden 3, 4 en 5 niet te kennen. Het berekenen van $\cos x$ of $\sin x = 0{,}8$ is een tijdrovende bezigheid.

De tijd kan beter worden benut om het examen op hoger niveau te brengen. Bij de correctie van het schriftelijke werk voor stereometrie en beschrijvende meetkunde viel het op, dat vele kandidaten geen onderscheid maakten tussen lijn (of rechte), halve lijn (of halve rechte) en lijnstukken.
Ook meenden nog vele kandidaten, dat als vlak V loodrecht staat op vlak W, elke lijn in V loodrecht staat op elke lijn in W.
Bij mondelinge examens bleek, dat vele kandidaten niet in staat waren definities en stellingen correct te formuleren.
In de beschrijvende meetkunde verdient het aanbeveling, dat een raaklijn uit een punt buiten een cirkel aan die cirkel ook werkelijk geconstrueerd wordt en niet wordt verkregen door een lineaal langs de cirkelomtrek te leggen. Het is zeer gewenst, dat constructies van een korte toelichting worden voorzien, waarbij de gebruikte punten, lijnen en vlakken met letters worden aangeduid en in de toelichting worden vermeld.
Bij de mondelinge examens beschrijvende meetkunde bleek bij de kandidaten vele malen een tekort aan routine in de eenvoudigste grondconstructies, zodat zij aan het uitwerken van een eenvoudig vraagstuk nauwelijks toekwamen. Uit: Euclides 32 (1956-1957)