Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 71

1995-1996 januari

4

Adolphe Quetelet, Belgisch statisticus

Correctievoorschriften vbo/mavo-examen

Regionale bijeenkomsten

Wiskunde in de Derde Wereld

Computer Algebra in het voortgezet onderwijs

Inhoud



Op de jaarvergadering 1993 van de NVvW werd besloten een fonds in het leven te roepen om het wiskundeonderwijs in de Derde Wereld te ondersteunen door financiële bijdragen aan een nader te bepalen project.
Een tweede minstens zo belangrijk doel was wiskundedocenten 'hier' te laten zien dat er 'daar' ook collega's zijn die zich met soortgelijke vragen en problemen bezig houden als zij. Dat wiskundeonderwijs niet ophoudt bij de grenzen van Nederland of de westerse wereld.
Het volgende artikel is het tweede uit een serie ontdekkingsreizen naar dat onderwijs 'daar'.

Wiskunde-onderwijs in de Derde Wereld (deel 2)

Hans Wisbrun

'Aansluiten bij de beginsituatie van de leerling': we hebben het allemaal zo vaak tijdens onze opleiding gehoord, dat het bijna een gemeenplaats is geworden. Natuurlijk doe je dat, of probeer je dat te doen. In mijn vorige artikel (Euclides 71-1) had ik het al over de grote verschillen in die beginsituatie tussen leerlingen uit een niet-westerse samenleving, met name in de Derde Wereld, en die in een westerse samenleving. In dit artikel wil ik daar nog wat nader op ingaan. Verder wil ik kort stilstaan bij de vraag of wiskunde een cultuurvrije wetenschap is, zoals wel beweerd wordt. Ook geef ik wat voorbeelden van hoe men in de Derde Wereld bezig is met wat wij hier realistische wiskunde noemen.

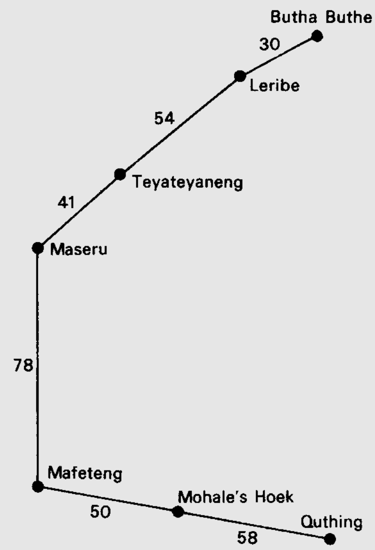
De leerling, de les

Bewust van het gevaar van generalisaties, kom ik tot de volgende schets van een leerling aan een middelbare school in Afrika beneden de Sahara.
Op de eerste plaats komt hij* doorgaans van het platteland. Zijn ouders leven van landbouw, veeteelt of visvangst. Hij heeft in zijn geboorteplaats op de lagere school gezeten en is voor zijn middelbare-school-studie naar de 'grote stad' gekomen, honderden kilometers verwijderd van zijn familie. Hij is vaak wat ouder dan de gemiddelde Nederlandse leerling, vanwege een onderbroken schoolcarrière (geldproblemen; familieomstandigheden; geen schoolgebouw of leraar beschikbaar). Hij is vaak intern, op het schoolinternaat. In de vakanties kost het hem vele dagen om naar zijn familie te reizen, zeker in de regentijd. Tot die familie behoren veel meer verwanten dan alleen zijn ouders, broers en zussen (extended family). De motivatie om te studeren vindt hij in tamelijk vage toekomstplannen als 'aan de universiteit studeren' en 'een baan in de hoofdstad'. Krant, radio en tv spelen geen grote rol in zijn leven. Ook met de moderne techniek (elektrische apparaten, computers) kwam en komt hij relatief weinig in aanraking. Zijn wereld is gedurende het schooljaar beperkt tot de wereld van de 'schoolcompound' en in de vakanties tot de wereld van zijn familie.
Zijn klas is groot, boven de 40 leerlingen. Dat is een van de redenen waarom er vooral klassikaal, frontaal les wordt gegeven. Vaak stelt de leraar de vragen aan niemand in

het bijzonder en soms antwoordt de klas dan in koor. De instructietaal (Engels, Frans, Portugees) is meestal niet de eigen moedertaal, niet die van de leerling en niet die van zijn leraar.
Er is weinig practicummateriaal voor handen. Soms zijn er, in het kader van een of ander project, passers en geodriehoeken beschikbaar. Schoolboeken heeft hij niet in eigen bezit, die blijven eigendom van de school. Wel een dictaatschrift, waarin op uiterst nauwkeurige wijze van het bord wordt overgeschreven. Huiswerk maken is vaak opgenomen in het schoolrooster, net als sport.

The diagram shows the main towns on the north and south roads from Maseru in Lesotho, and the distances in kilometres between them. For example, from Mafeteng to Mohale's Hoek is 50 km.

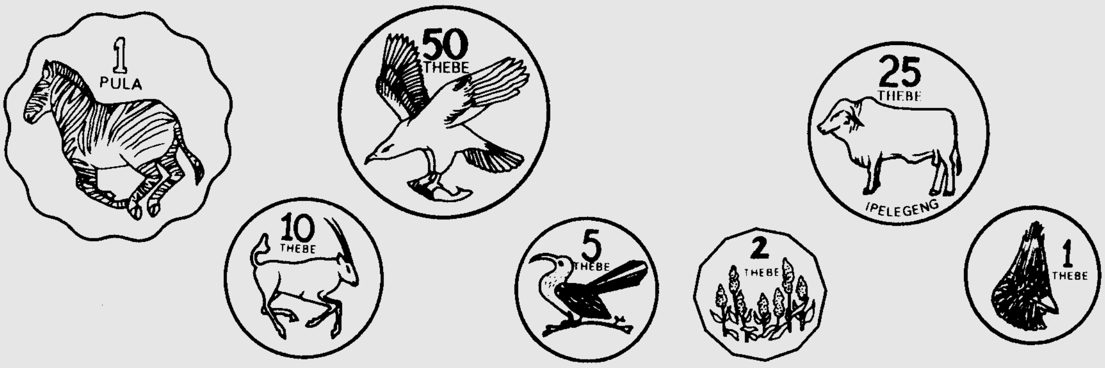
How far is it by road:
(a) from Butha Buthe to Teyateyaneng;
(b) from Maseru to Butha Buthe;
(c) from Maseru to Quthing;
(d) from Mafeteng to Leribe;
(e) from Quthing to Butha Buthe?



Afbeelding 1

Botswana has Pula and thebe.
1 Pula (P) = 100 thebe (t)
P1 = 100t

How many thebe in:
(i) P2; (ii) P3.45; (iii) P5.06?



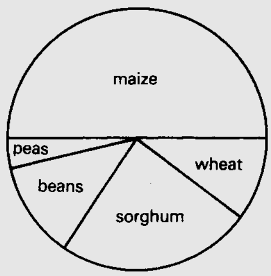
Boifang goes shopping in Botswana. She buys 1 bottle of cooking oil for P1.45, 1 bottle of milk for 25t and a packet of tea for 54t. How much does she pay altogether?

Afbeelding 2

Het eindexamen speelt een belangrijke rol in zijn schoolleven. Daar hangt van af of hij zijn toekomstdromen zal kunnen verwezenlijken. Dat examen is vaak een variant op het examen dat dat jaar in het voormalige koloniserende land wordt gegeven. Soms wordt het daar ook nagekeken.

A farmer grows maize, wheat, sorghum, peas and beans. The diagram compares the number of bags of each.

(a) (i) Which crop gives most bags?
(ii) How do you know?
(b) Which crop gives least bags?
(c) What fraction of the bags is maize?



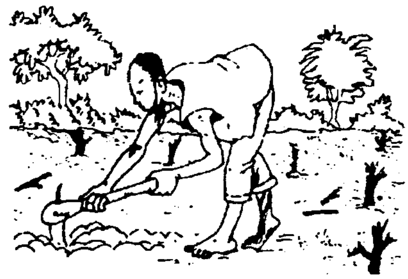
Afbeelding 3

de ene cultuur ontwikkeld is, kunnen overplaatsen naar een andere cultuur.

Veel onderwijsmensen, en zeker zij die in de Derde Wereld zelf werken, geloven niet in het idee dat wiskunde neutraal is en onafhankelijk van cultuur. Munir Fasheh uit Palestina[1]: “a common misconception in the teaching of math has been, and still is, the belief that math can be taught effectively and meaningfully without relating it to culture or to the individual student”. Paulus Gerdes uit Moçambique[2]: “This article confronts a widespread prejudice about mathematical knowledge, that mathematics is ‘culture-free’, by demonstrating alternative constructions … ”. In ieder geval is het een feit, dat er veel mis gaat als westerse wiskunde (wat dat dan ook precies moge zijn) in de Derde Wereld wordt onderwezen. In een tamelijk recent artikel over wiskundeonderwijs in Zuid Afrika[3] staat bijvoorbeeld dat 86% van de zwarte bevolking ernstig onderpresteert op het gebied van de wiskunde. Dan hebben we het over de mechanistische of structuralistische wiskunde, zoals die hier in Nederland ook werd/wordt onderwezen. Zo’n cijfer heeft consequenties voor de economie van een land. Van de voorziene vacatures per jaar in aan wiskunde gerelateerde beroepen (accountants, architecten, ingenieurs, technici, …) zal maar een beperkt deel vervuld kunnen worden. Zo heeft Zuid Afrika per jaar 3000 ingenieurs met een universitaire graad nodig, maar studeerden er bijvoorbeeld in 1989 slechts 63 zwarte ingenieurs af (samen met 1447 witte).
Natuurlijk spelen meer factoren een rol bij dit onderpresteren dan alleen

2 *Le prix du travail*

Un travailleur qui produit quelque chose fait souvent un bénéfice beaucoup plus grand que son prix de revient ; car son bénéfice, c’est le prix de son travail.



Exemple : Avec un sachet de graines à 150 F, et 500 F de fumier, Yahaya a pu produire 120 kg de pommes de terre. Il a payé 100 F de transport. Il vend ses pommes de terre à 175 F le kilo. Le prix de vente est donc de 21 000 F, pour seulement 1 650 F de prix de revient. Mais le bénéfice (19 350 F) représente le prix de son travail pour produire ces pommes de terre.

3 Ali est tailleur. Il achète 12 mètres de tissu à 500 F le mètre. Il coud un complet « *grand boubou* » et le vend à 8 000 F. Pour ce travail, il a acheté pour 650 F de fil. Que penses-tu de son bénéfice ?

4 Un menuisier travaille 2 jours pour fabriquer une table. Il a dû acheter pour 3 250 F de planches, et 2 m de « *formica* » à 1 135 F le mètre. Le transport lui a coûté 650 F. Il compte gagner 1 400 F par jour de travail. Combien doit-il vendre sa table ?

Afbeelding 4

cultuurverschillen. Maar als ieder leerboek over didactiek leert dat er rekening gehouden moet worden met de beginsituatie van de leerling, dan zie je de bui al hangen: die beginsituatie is in de Derde Wereld behoorlijk anders dan hier. Daar moet je rekening mee houden als je voor de klas staat. En ook als er nieuwe leerplannen of schoolboeken gemaakt moeten worden. Inderdaad: twee maal twee is vier, waar je ook bent op de wereld, maar *hoe* je dat onderwijst, dat hoeft niet overal op dezelfde manier te gaan. Daarbij zou je gebruik moeten maken van de plaatselijke culturele gegevenheden.

Soms zie je, bijvoorbeeld aan het gebruik van namen, dat het wel degelijk om lokaal-gemaakte of lokaal-aangepaste boeken gaat. Dan staat er Mafeteng of Maseru in plaats van Liverpool of Londen. Of pula en thebe in plaats van ponden en pennies. Dan staan in een cirkeldiagram plaatselijke gewassen. Daar kan een leerling zich iets bij voorstellen. Dat is een eerste stap. (Zie afbeelding 1,2 en 3)

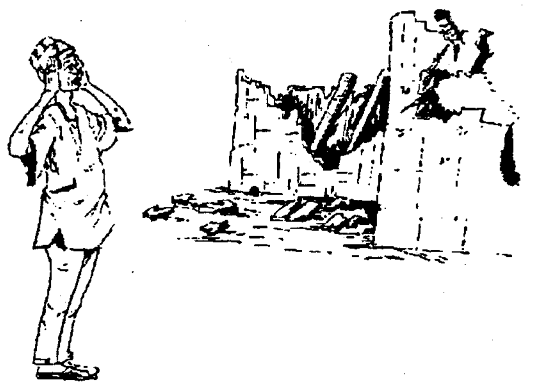
Soms probeert men een directe bijdrage te leveren aan het oplossen van de problemen waar leerlingen mee geconfronteerd worden. Zo

4 Comment remplacer le matériel qui s'abîme ?

AMORTISSEMENT : les frais causés (de temps en temps) par le matériel qui s'use ou se gâte, et qu'il faut remplacer.

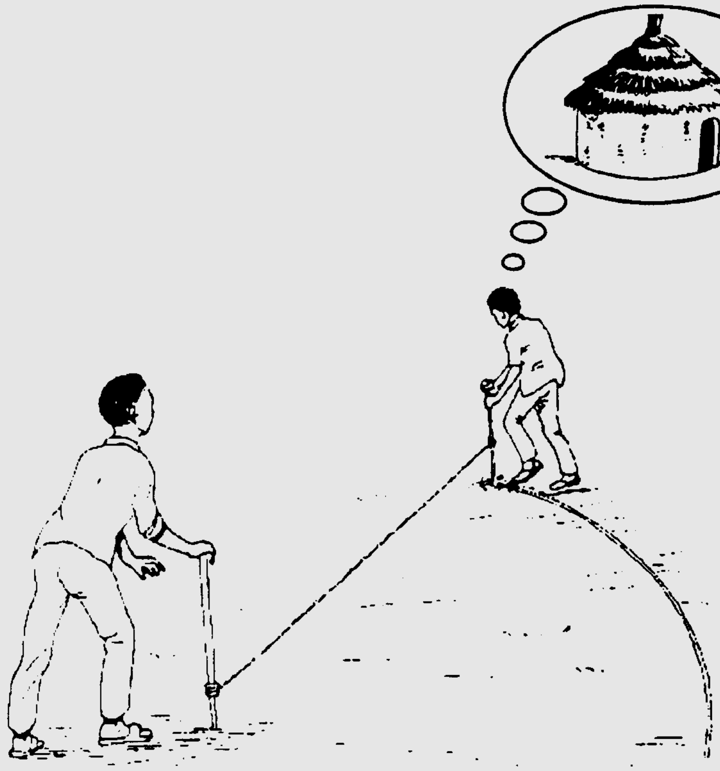
Exemple : Balki et Zara tiennent chacune une table. Elles vendent du riz, de la pâte, de la salade. Chacune d'elles fait un petit bénéfice.
Balki dépense tout, au fur et à mesure qu'elle le gagne. Zara met 100 F de côté chaque semaine « *pour le cas où quelquechose arrive* ». Les deux restauratrices ne se sont pas rendu compte que leur terrain a des termites. Un jour, les 2 tables se cassent : Balki doit fermer sa boutique, tandis que Zara peut racheter une nouvelle table à 4 000 F et continuer son commerce. Les 100 F que Zara économise chaque semaine ont suffi pour l'amortissement (c'est-à-dire, dans ce cas, le prix de la table qu'il a fallu remplacer).

7 Sani et Harouna sont deux propriétaires de maisons. Chacun d'eux loue sa maison à 25 000 F par mois. Toutes les fins de mois, Sani se précipite chez son locataire; il récupère son argent pour aller le dépenser. Harouna fait des réparations si nécessaire et place le reste de l'argent dans son carnet de banque. Après une dizaine d'années, la maison de Sani s'écroule, suite à une forte pluie. Harouna vient de payer un « *carré* » à 600 000 F qu'il s'apprête à construire. Qu'est-ce qui va arriver à Sani ? Et à Harouna ? Pourquoi ?



8 Sitou, le réparateur de vélo (voir 3ᵉ paragraphe), met 125 F de côté chaque semaine. Un jour, sa pompe est cassée. Il voit avec soulagement qu'il a juste assez pour la remplacer. Depuis combien de temps économise-t-il ?

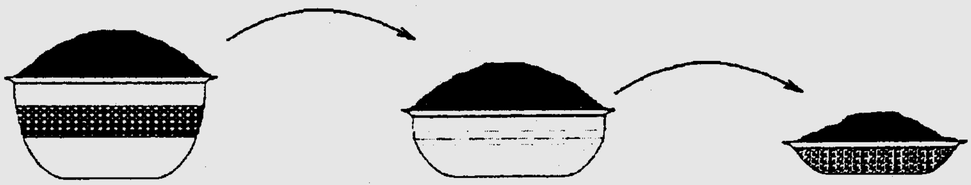
Afbeelding 5, INDRAP, Niger; voor groep 7



Afbeelding 6, INDRAP, Niger; voor groep 6

Choisis des unités différentes et reprends l'exemple suivant :

Du plus grand au plus petit :



A B C

B sera rempli en monticule ; il en restera dans A

C sera rempli en monticule ; il en restera dans B

On a trouvé beaucoup d'unités pour mesurer les grains : petites calebasses ; louche ; tia ; mudu ; zaka ; ...

Afbeelding 7, INDRAP, Niger; voor groep 5 worden kinderen in veel Derde-Wereldlanden al jong ingeschakeld in het arbeidsproces, bijvoorbeeld in de handel. Dan is het van belang dat zij de meest elementaire principes van de economie kennen. Het materiaal in afbeelding 4 t/m 7 is ontwikkeld door het INDRAP in Niger. Het is leerstof voor de lagere (!) school, groep 7, 6 en 5, in de huidige Nederlandse terminologie.

Zelfs een moeilijk begrip als vervangingskosten wordt behandeld. (Zie afbeelding 4)

Afbeelding 5 is een mooi voorbeeld van wat we hier realistisch rekenen zouden noemen. Maar ook bij onderwerpen als meetkunde en meten kan uitgegaan worden van de plaatselijke situatie.(Zie afbeelding 6 en 7)

Ethnomathematica

Er is echter ook een veel radicalere benadering mogelijk. Een stroming die wordt aangeduid met de term Ethnomathematica en waarvan de Braziliaan D'Ambrosio de vader kan worden genoemd. Uitgangspunt van deze beweging is dat iedere cultuur zijn eigen wiskunde heeft ontwikkeld om om te kunnen gaan met de praktische problemen van het dagelijks leven en dat je die ontstaansgeschiedenis, in verkorte vorm, kunt gebruiken voor je onderwijs. Wiskunde is in deze benadering een cultureel produkt, ontwikkeld als resultaat van verscheidene activiteiten. Alan Bishop[4] onderscheidt daarbij zes fundamentele activiteiten die universeel zouden zijn, in de zin dat zij door iedere cultuur bedreven worden: tellen, plaatsbepalen, meten, ontwerpen, spelen en uitleggen. Ook Afrika telt, zoals de titel luidt van een onderzoek door Zaslavsky[5], waarin zij onder andere beschrijft hoe zogenoemde primitieve volkeren, als de sociale noodzaak daartoe bestaat, manieren ontwikkelen om ook grote aantallen te beschrijven, gebruik makend van een systeem van kauri-schelpen.
Ook de Navajo's bepalen hun positie ten opzichte van hun ruimtelijke omgeving, al doen zij dat niet op dezelfde manier als wij[6]. De Navajo's "tend to speak of the world in terms of process, event and fluxes, rather than parts and wholes or clearly distinguishable static realities". Ook de Kpelle in Nigeria, waar ik het in mijn vorige artikel over had, meten, bijvoorbeeld met de kopi als eenheid, een kop waarmee hoeveelheden rijst worden gemeten[7].
D'Ambrosio stelt dat de praktische wiskundige vaardigheden die elk kind in de Derde Wereld van huis uit leert, omdat ze zo essentieel zijn voor het dagelijkse leven, op school niet gewaardeerd worden. Sterker nog: ze worden daar verworpen, onderdrukt en uiteindelijk vergeten. Dat leidt tot psychologische blokkades als de schoolwiskunde moet worden geassimileerd. Hij pleit ervoor om juist aan te sluiten bij deze 'spontane', traditionele, wiskundigheid en 'Ethnomathematica' te erkennen en op te nemen in het leerplan.
Het idee klinkt logisch: aansluiten bij de beginsituatie. Maar wat weten wij eigenlijk van deze 'verborgen' wiskunde? Ze is vaak impliciet en informeel. Ze is deels verdwenen. Er zijn weinig geschreven bronnen die geraadpleegd kunnen worden. Hoe reconstrueer je deze traditionele wiskunde? En hoe maak je vervolgens de vertaling naar een leerplan, een leerboek?
Er zijn inmiddels interessante aanzetten hiertoe gegeven. Daarover wil ik het in een volgend artikel hebben: een meer concrete invulling van wat Ethnomathematica voor de Derde Wereld zou kunnen betekenen. Ik schrijf 'voor de Derde Wereld', maar het hoeft geen ver-van-mijn-bed-show te zijn. Ook in Nederland, op weg naar een multi-culturele samenleving, kunnen wij inspiratie putten uit deze nieuwe benadering.

Noten

* uiteraard kan, ook in het vervolg, voor 'hij' ook 'zij' gelezen worden

1 *Munir Fasheh* (1982)
Mathematics, Culture and Authority
For the Learning of Mathematics 3, 2

2 *Paulus Gerdes* (1988)
On culture, geometrical thinking and mathematics education
Educational Studies in Mathematics 19

3 *Murray Macrae* (1994)
A legacy of apartheid: the case of mathematical education in South Africa
Int. J. Educational Development, Vol 14, 3

4 *Alan J. Bishop* (1988)
Mathematical Enculturation
Kluwer Academic Publishers

5 *Zaslavsky* (1973)
Africa Counts
Prindle, Weber and Schmidt, Inc., Boston, Mass.

6 *Pinxten, R.* (1983)
The Anthropology of Space
University of Pennsylvania Press

7 *Gay, J. and Cole, M.* (1967)
The New Mathematics in an Old Culture
Holt, Rinehart and Winston, New York

Computer Algebra in het voortgezet onderwijs

Wim Förster

De werkgroep CAVO

Sedert december 1993 bestaat er een werkgroep Computer Algebra Voortgezet Onderwijs, afgekort tot CAVO. Deze werkgroep functioneert onder auspiciën van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en krijgt steun van de TU Delft en het expertisecentrum Computer Algebra Nederland (CAN). CAN is promotor en distributeur van computeralgebraprogramma's in Nederland.
Onder de bezielende leiding van Agnes Verweij en Paul Drijvers wordt er door een groep enthousiaste docenten lesmateriaal ontwikkeld voor het gebruik van computer algebra (CA) in het voortgezet onderwijs. Tevens wordt er gepraat over de manier waarop CA geïntegreerd kan worden in het huidige en nieuwe lesprogramma voor wiskunde.
CA-programma's bestaan er in ruime mate en in de toekomst zullen er nog diverse bijkomen. Voor het voortgezet onderwijs vond de werkgroep CAVO het programma Derive op dit moment het meest geschikt. Via CAN kregen de werkgroepleden en ook hun scholen het programma Derive in bruikleen. In de eerste bijeenkomsten werden onderwerpen uitgekozen die geschikt zouden zijn voor CA-practica. Thuis werd practicummateriaal ontworpen dat op de eigen school werd getest. Daarna werd er gepraat over de inhoud en vormgeving van het materiaal.
We vonden dat alle practicummateriaal aangeboden moest worden volgens een uniform model. Aan het bijgevoegde voorbeeld ‘Wortels benaderen met de methode van Heron’ is te zien voor welke opbouw we uiteindelijk gekozen hebben: een docentenblad, één of meer opdrachtenbladen, en een Derive-blad.

Een bundel practica

Inmiddels is het ontwikkelde materiaal tot een bundel verwerkt. Deze bundel omvat de volgende practica: kennismaken met Derive; grafieken tekenen en vergelijkingen oplossen; transformaties; parabolen met een parameter; rond veeltermfuncties; introductie matrices; matrices toepassen; roodborstjes*; meetkundige rijen; wortels benaderen met de methode van Heron; eindige sommen; een onderzoek naar limieten van rijen; de inhoud van een afgeknotte kegel; priemgetallen; booglengte en π.
Deze gebundelde practicummaterialen kunnen besteld worden bij:
CAN
Kruislaan 419
1098 VA Amsterdam
telefoon 020-5608400
fax 020-5608448 http://www.can.nl.
De prijs per bundel is ƒ 20,-.
Kopiëren van practicummaterialen ten behoeve van gebruik in de klas is toegestaan. Hopelijk zijn er in den lande nog vele enthousiaste collega's die het aangeboden materiaal in hun eigen lessituatie gaan gebruiken, verbeteren en … die misschien wel nieuwe pakketjes gaan ontwikkelen. We hopen dat zij hun leservaringen met en commentaar op de bundel via CAN aan CAVO kenbaar willen maken.

CA en de toekomst

Een belangrijke drijfveer om met CAVO aan de slag te gaan, was het idee dat ons wiskundeonderwijs in de loop van de komende decennia grote veranderingen zal ondergaan. Verwacht mag worden dat het handmatig oefenen met rekentechnieken, dat momenteel nog een groot deel uitmaakt van de lestijd, een geringere rol zal gaan spelen. Differentiëren, integreren, rekenen met matrices, oplossen van stelsels vergelijkingen en ongelijkheden, het verwerken van statistische gegevens, dit alles zal (voor een deel?) met behulp van CA-programma's worden uitgevoerd. Nieuwe onderwerpen zoals numerieke benaderingen, getaltheorie, chaoswiskunde, 3D-grafieken en nog veel meer komen binnen het bereik van onze leerlingen. Daarbij zal er een geheel nieuw didactisch concept ontwikkeld moeten worden, anders lopen we het gevaar dat wiskunde voor de leerlingen een ‘black-box’-gebeuren wordt. Een leerling die CA gebruikt, dient te weten waar en waarom hij/zij een bepaalde techniek kan toepassen. Om dit te bereiken, zullen wij, als onderwijs-wiskundigen, dienen te anticiperen op de komende veranderingen.

CAVO na de bundel

Publicatie van de bundel practica betekent voor de CAVO-leden de afsluiting van de eerste fase van hun voorbereiding op de toekomst. In september ’95 is besloten met CAVO

door te gaan. De werkwijze blijft gelijk, maar de inhoud van de te ontwerpen practicummaterialen proberen we af te stemmen op de nieuwe programma's voor de tweede fase van havo en vwo. Daarbij denken we niet alleen aan de verplichte onderwerpen, maar ook aan extra stof die in de vorm van Zebra-pakketjes een plaats in de nieuwe tweede fase zou kunnen krijgen.
Collega's die tijd en zin hebben om in CAVO-verband dit soort ontwerpwerk te doen en die het ook aandurven al vóór invoering van de nieuwe programma's het een en ander met hun leerlingen uit te proberen, worden uitgenodigd kontakt op te nemen met:
Agnes Verweij
tel. 015-2785808 (werk)
of 071-5131028 (privé).

Wortels benaderen met de methode van Heron

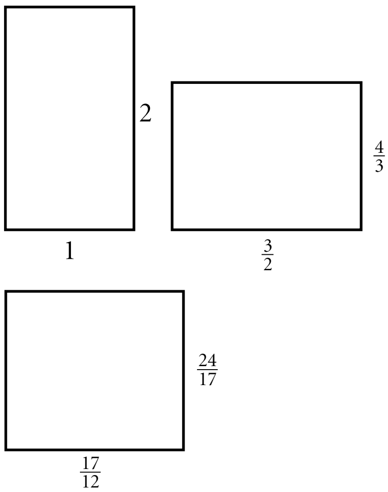
Een practicum van de werkgroep CAVO

Docentenblad

Globale informatie:
Het practicum is geschreven voor klas 5 vwo wiskunde B.
Het doel van het practicum is het benaderen van wortels door iteratie en het ontwikkelen van enig gevoel voor nauwkeurigheid van een benadering.
Praktische informatie:
De leerlingen moeten enigszins vertrouwd zijn met de begrippen ‘rij’, ‘limiet van een rij’ en ‘iteratie’. De ervaring met Derive die het practicum vereist, bestaat uit enige handigheid met het programma in het algemeen. Het practicum vergt ongeveer twee lesuren.
Didactische informatie:
Dit practicum maakt nadrukkelijk gebruik van de mogelijkheid van Derive om zowel exact als met een gewenste nauwkeurigheid te rekenen. Opgave 8 is een generalisatie naar de derde dimensie. Voor snelle leerlingen is dit wellicht interessant. Wie aan deze opgave niet toekomt, mist niets essentieels.

Opdrachtenblad

Hoe groot is $\sqrt{2}$ eigenlijk? Niemand weet dat precies. Waarschijnlijk heeft Heron van Alexandrië, een Egyptisch wiskundige uit de eerste eeuw van onze jaartelling, de volgende manier bedacht om dit getal nauwkeurig te benaderen.
Een vierkant met oppervlakte 2 heeft zijden met lengte $\sqrt{2}$. Op zoek dus naar zo'n vierkant. De eerste poging



Figuur 1

zie je linksboven: een rechthoek met basis 1 en hoogte 2. De oppervlakte is wel 2, maar het is nog lang geen vierkant.
De tweede rechthoek ontstaat door als basis het gemiddelde te nemen van de twee zijden van de eerste:

$$\text{basis} = \frac{(1+2)}{2}$$

Dit is gelijk aan $\frac{3}{2}$
De hoogte moet dan gelijk zijn aan $\frac{4}{3}$ want anders is de oppervlakte niet gelijk aan 2. De tweede rechthoek die je zo vindt, lijkt al meer op een vierkant en de basis ligt al dichter bij de gezochte $\sqrt{2}$.
Deze werkwijze kun je herhalen: de derde rechthoek benadert het vierkant al weer beter dan de tweede en de basis is een betere schatting van $\sqrt{2}$.
Dit herhalen van eenzelfde procedure heet *itereren*. Hieronder ga je door middel van iteratie enkele wortels benaderen.

1a Ga na dat de afmetingen van de derde rechthoek inderdaad op de beschreven manier uit die van de tweede volgen.
b Hoe groot is het verschil tussen $\frac{17}{12}$ en $\sqrt{2}$ volgens je rekenmachine?

De rij rechthoeken wordt voortgezet.

2a Welke afmetingen heeft de vierde rechthoek?
b Welke benadering van $\sqrt{2}$ geeft dit?

We noemen $a(n)$ de basis van de n-de rechthoek die op deze manier ontstaat. Dan geldt dus dat $a(1) = 1$, $a(2) = \frac{3}{2}$ en $a(3) = \frac{17}{12}$.

3 Bereken $a(4), a(5), a(6), \ldots$, net zolang tot er geen verschil meer is tussen deze benadering van $\sqrt{2}$ en die van je rekenmachine. Hoeveel termen heb je nodig?
4 In Derive kun je met een precisie van 30 cijfers werken. Hoe lang duurt het voor de iteratie dezelfde waarde geeft als de benadering die het programma rechtstreeks geeft voor $\sqrt{2}$?

Kennelijk ‘kruipt’ de rij naar een limietwaarde toe die gelijk is aan $\sqrt{2}$. Opgaven 5 en 6 leiden tot het bewijs dat dit de enig mogelijke positieve limiet is. Dat de rij inderdaad convergeert, wordt niet bewezen.

5a Ga na dat de hoogte van de n-de rechthoek gelijk is aan

$$\frac{2}{a(n)}$$

b Verklaar dat de waarde van $a(n+1)$ op de volgende manier van die van $a(n)$ afhangt:

$$a(n+1) = \frac{(a(n) + \frac{2}{a(n)}(n))}{2}$$

6a Veronderstel dat de rij een limietwaarde a heeft.

Dan geldt voor deze a dat

$$a = \frac{a + \frac{2}{a}}{2}$$

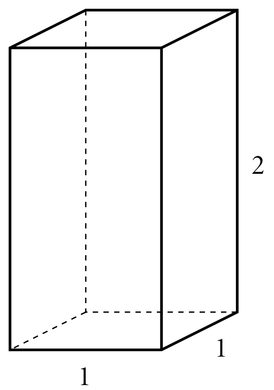
Verklaar dit.

b Welke waarde(n) kan a kennelijk hebben?

7a Hoe verandert de uitdrukking van opgave 5b als je niet $\sqrt{2}$ maar $\sqrt{3}$ wilt benaderen?

b Benader $\sqrt{3}$ in 6 decimalen nauwkeurig.

8 Met Herons methode kan men ook $\sqrt[3]{2}$ benaderen. Begin met een balk met een vierkant grondvlak. De zijde van het vierkant is 1 en de hoogte van de balk is 2, zodat ook de inhoud 2 is.



Figuur 2

Van de tweede balk heeft het vierkante grondvlak als lengte het gemiddelde van basis en hoogte van de eerste, dus $\frac{3}{2}$.

a Ga na: de hoogte van de tweede balk is $\frac{8}{9}$.

b Hoe kun je de uitdrukking van opgave 5b aanpassen voor deze situatie?

c Benader $\sqrt[3]{2}$ in 10 decimalen nauwkeurig.

Noot

* Roodborstjes is de naam van een opgave uit een vwo A-examen van enkele jaren geleden.

▼ Lees verder op pag. 144

40 jaar geleden

967

Aan weerszijden van het vlak van de gelijkzijdige driehoek ABC, waarvan de zijden $5\sqrt{3}$ cm zijn, kiest men de punten D en E zodanig, dat DA, DB, DC, EA, EB en EC allen $5\sqrt{2}$ cm zijn. Men beschouwt het zesvlak met A, B, C, D en E als hoekpunten.

a. Bereken de afstand DE.

b. Onderzoek of er een bol bestaat, die door alle hoekpunten van het zesvlak gaat.
Indien zo'n bol bestaat, bereken dan de straal.

c. Onderzoek of er een bol bestaat, die aan alle zijvlakken raakt. Indien zo'n bol bestaat, bereken dan de straal.

d. Onderzoek of er een bol bestaat, die aan alle ribben raakt. Indien zo'n bol bestaat, bereken dan de straal.

968

Gegeven is een regelmatige vierzijdige pyramide $T.ABCD$. Men brengt door de ribbe BC van het grondvlak een vlak aan, dat de opstaande ribben TA en TD opvolgend in de punten P en Q snijdt.

a. Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt van BQ en CP, als P de ribbe TA doorloopt.

b. Ook van BP en CQ.

c. Bereken de verhouding van de inhouden van de drie delen, waarin de vlakken, die door BC gaan en TA in drie gelijke delen verdelen, de pyramide verdelen.

(ontleend aan het Eindexamen H.B.S.-B in 1955)

Noot

Vraagstukken uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 43 (1955-1956).

INTERVIEW

‘Je moet aansluiten bij wat de leerlingen wèl kunnen’

Martinus van Hoorn

Leo van Kemenade, 44 jaar, is sinds zijn 23e jaar leraar, tegenwoordig aan het Christiaan Huygens College te Eindhoven. Deze school is ontstaan door een fusie van vier scholen, en telt in totaal 1600 à 1700 leerlingen.

Leo van Kemenade zit nog gewoon op zijn vertrouwde lokatie, en geeft les aan alle klassen van het (i)vbo.

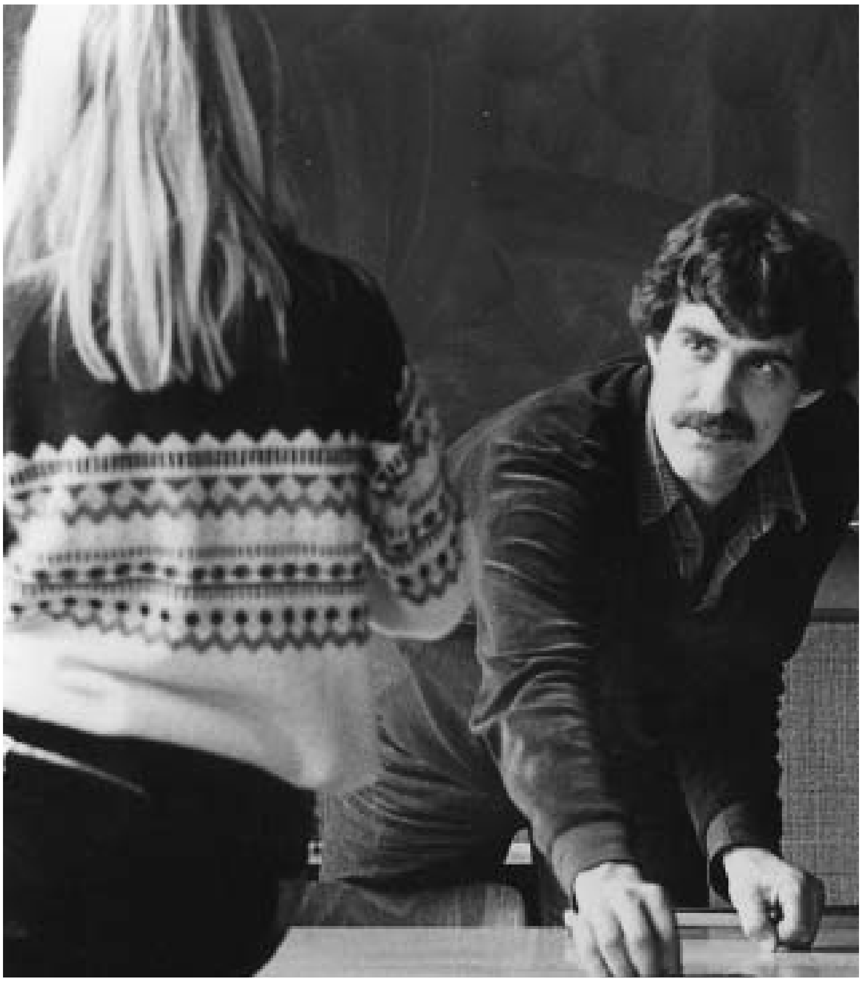
Wil je iets vertellen over de leerlingen op jouw lokatie, en over de klassen die je dit jaar hebt?

We hebben hier 190 leerlingen, van wie 120 met een i-indicatie. Er zijn ivbo-klassen, gemengde ivbo/vbo-klassen en dit jaar ook vbo/mavo-klassen. Volgend jaar zitten de i-leerlingen in afzonderlijke i-klassen, in zulke klassen zitten nu ook al hoogstens 16 leerlingen.
De vbo-afdelingen zijn Verzorging en Mode & Kleding, en nu ook Administratie. In de eerste twee leerjaren hebben we nog 20 % jongens, maar die stromen na twee jaar vrijwel allemaal door naar een andere vbo-opleiding. Misschien wordt het met Administratie anders. Verder is 17 % van de leerlingen allochtoon.

Welke methode gebruik je, en op welke gronden heb je die methode gekozen?
Ik kon inderdaad zelf kiezen. Het is Realistische Wiskunde geworden, omdat daar vanaf het eerste jaar direct een i-boek bij was; dit is een werkboek. Sinds de fusie is er wel weer een gesprek over de te gebruiken methodes op gang gekomen. Waarschijnlijk gaan we veranderen.
Malmberg geeft verder een box met materialen uit (niet per se bij de methode te gebruiken), en sheets. Maar ik heb zelf ook materiaal gemaakt.
In de derde klas heb ik het werkboek nog niet gebruikt, de leerlingen moeten van mij ook zelf op ruitjespapier tekeningen maken, en andere dingen meer zelfstandig doen.

Welke lesvormen hanteer je?
Sinds de fusie is er uitvoerig over de werkvormen gesproken. Elk laatste kwartier van een les willen we de leerlingen laten werken. In mijn lessen plan ik 20 minuten bespreking, 15 minuten klassikale uitleg, en dus 15 minuten zelf werken. Ik doe geen groepswerk.

Hoe gaat het met de toetsing van de basisvorming?
In het tweede leerjaar, vorig jaar, hebben alle leerlingen toets 1 gedaan.

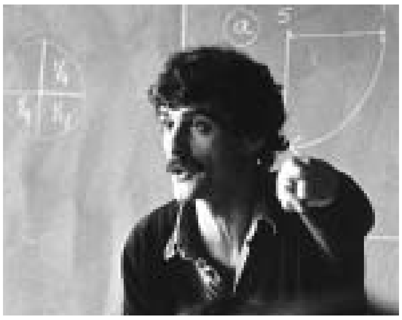


Voor de i-leerlingen was dat waardeloos, het was een plaag voor ze. Mijn twaalf i-leerlingen hadden samen nog een stuk minder dan de maximale score.

Voor de vbo-leerlingen was de toets wel moeilijk, maar het resultaat viel me niet tegen. De methode had ze er goed op voorbereid. Maar ik blijf me afvragen of het examen al niet genoeg is voor deze leerlingen.

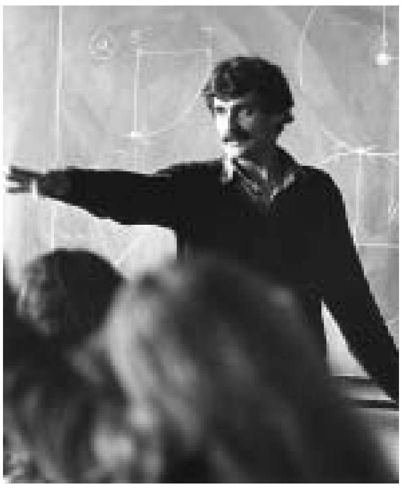
Je draait mee in een allochtonenproject. Kun je daar meer over vertellen?
Dit is het zgn. ALL-project van de gemeente Eindhoven, dat dit jaar begonnen is. Wij zijn proefschool. De gemeente wil het afhaken tegengaan, wil bevorderen dat (ook) allochtone leerlingen een vervolgopleiding kiezen.
Er zijn bijeenkomsten voor de docenten en voor de allochtone leerlingen uit de derde klassen. De leerlingen krijgen 7 bijeenkomsten, waar telkens mensen van de gemeente bij zijn. De eerste keer werd er geïnventariseerd om welke leerlingen het gaat, waar ze nu zitten en welke verwachtingen ze hebben. Dit was gekoppeld aan een gezellige avond. Later gaat het over het kiezen van pakketten, en wellicht ook over andere manieren om de stof aan te bieden. Hier zit dan weer een begeleiding door het APS bij, in verband met 'Alle leerlingen bij de les'. Hier kan een teamtraining uit voortkomen.

Wat vind je het belangrijkste in het wiskunde-onderwijs voor vbo-leerlingen?
Het gaat om de vormende waarde. Ze moeten oppervlakten en inhouden kunnen uitrekenen bijvoorbeeld. Ze moeten grafische voorstellingen begrijpen.



Die heel beroeps- en praktijkgerichte wiskunde is niet zo zinvol, omdat de meeste van mijn leerlingen zulke wiskunde later toch niet gebruiken. Maar juist de algemeen vormende aspecten komen ze later wel tegen.

En wat vind je het belangrijkste voor een wiskundeleraar?
Voor deze leerlingen moet je geduld hebben en je moet creatief zijn. Je moet open voor ze staan en aansluiten bij wat ze wèl kunnen - de positieve benadering.
Ik wil niet boven de leerlingen staan, maar tussen ze in.

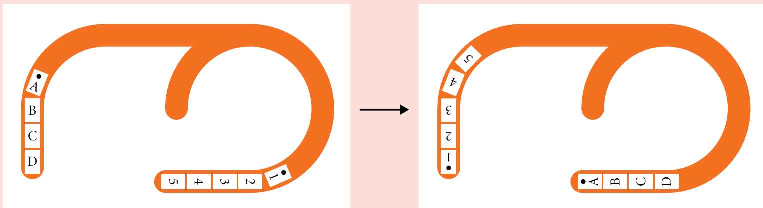


Recreatie

Opgave 667

Nederland kent drie verschillende boekenclubs: ‘ECI’, ‘Nederlandse Boekenclub’ en ‘Boek en Plaat’. Als u lid bent, dan kunt u nu voor *ƒ* 19,90 een exclusief puzzelboek kopen: ‘Optische Illusies en andere Puzzels’ van Jack Botermans en Jerry Slocum. (ISBN 90 67 61 2243). Er worden zeer veel antieke puzzels getoond uit de puzzelcollectie van Jerry Slocum. Zoals de titel al aangeeft zijn het meestal optische grapjes of zoekplaatjes. Jammer dat de Hollandse sigarenzakjes met hun zoekplaatjes en rebussen ontbreken. De aankondiging in de clubcatalogi als ‘Onweerstaanbaar voor puzzelfanaten’ is een tikkeltje overdreven.

Naar aanleiding van de opening van de Eurotunnel brengt de Engelse puzzelfirma PENTANGLE een houten rangeerpuzzel op de markt: ‘Chunnel Trouble ?’.



In Engeland staat de locomotief A met zijn wagons B, C en D. In Frankrijk staat locomotief 1 met zijn wagons 2, 3, 4 en 5. Met behulp van het zijspoor moeten ze elkaar passeren. De voertuigen zijn allemaal even groot. Op het zijspoor past slechts één voertuig. De locomotieven hebben alleen aan de achterkant een haak, waarmee ze wagons kunnen trekken (of duwen). Met de voorkant kunnen ze alleen duwen.
Als u binnen 1 maand zo kunt rangeren dat ze elkaar passeren, dan verdient u 5 punten voor de puzzelladder.

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan
Jan de Geus Valkenboslaan 262-A,

Oplossing 664

Euler definieerde een Latijns Vierkant als een nxn-matrix, bestaande uit n verschillende elementen, waarbij nergens twee dezelfde voorkwamen in een rij of kolom. Bij een Diagonaal Latijns Vierkant staan ook op de twee diagonalen nergens twee dezelfde elementen. De oplossing van het puzzeltje 'OVERAL 15' was zo'n D.L.V. voor $n = 5$. In (1) wordt bewezen dat voor $n \geq 4$ er minstens een D.L.V. van orde n bestaat. Dus ook voor $n = 8$ bestaat er een oplossing. (Alle getoonde oplossingen zijn van *Dick Buijs* (10 punten), Kerk-Avezaath).

$n = 5$

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

$n = 8$

1	2	3	4	5	6	7	8
8	7	6	5	4	3	2	1
2	1	4	3	6	5	8	7
7	8	5	6	3	4	1	2
4	3	2	1	8	7	6	5
5	6	7	8	1	2	3	4
3	4	1	2	7	8	5	6
6	5	8	7	2	1	4	3

3 keer $n = 8$

1	2	3	4	5	6	7	8
7	8	5	6	3	4	1	2
4	6	7	1	8	2	3	5
2	3	8	5	4	1	6	7
8	4	2	3	6	7	5	1
5	1	6	7	2	3	8	4
3	7	4	8	1	5	2	6
-	5	1	2	7	8	4	-

1	2	3	4	5	6	7	8
7	8	5	6	3	4	1	2
4	6	7	1	8	2	3	5
2	3	8	5	4	1	6	7
8	4	2	3	6	7	5	1
5	1	-	7	2	-	8	4
3	7	4	8	1	5	2	6
6	5	1	2	7	8	4	3

1	2	3	4	5	6	7	8
7	8	5	6	3	4	1	2
4	6	7	1	8	2	3	5
2	3	8	5	4	1	6	7
8	4	2	-	-	7	5	1
5	1	6	7	2	3	8	4
6	7	4	8	1	5	2	3
3	5	1	2	7	8	4	6

Bij $n = 5$ is het zelfs mogelijk dat ook op alle gebroken diagonalen de getallen verschillend zijn. W.W. Rouse Ball vatte in (2) zo'n oplossing op als een oplossing van het 5-voudig 5-koninginnenprobleem. Dat wil zeggen: de schaakkoninginnen met nummer 1 vallen elkaar niet aan. Idem voor de nummers 2, 3, 4 en 5. Letterlijk een 'superposable arrangement'. In 1914 bewees Thorold Gosset dat er voor $n = 8$ geen 'superposable arrangement' mogelijk is. De kunst is nu om uit de 92 basisoplossingen van het 8-koninginnen-probleem díe oplossingen te kiezen, die tegelijkertijd op het schaakbord neergezet kunnen worden. Het blijkt dan dat maximaal 6 sets van 8 koninginnen en 2 sets van 7 koninginnen geplaatst kunnen worden zonder dat een koningin haar eigen kleur aanvalt. Dus 62 velden zijn bezet. Dick laat ons 3 (verwante) oplossingen zien. Ook *Ad Boons* (28 punten), Tilburg en *Willem van der Vegt* (10 punten), Zwolle kwamen tot 62 velden.

Literatuur:

1 *J. Dénes en A.D. Keedwell*
Latin Squares and their Applications
(English Universities Press Ltd, 1974)

2 *W.W. Rouse Ball en H.S.M. Coxeter*
Mathematical Recreations and Essays, 13th ed.
(Dover, 1987)

Met 62 punten is winnaar van een boekenbon van ƒ 25,–:

Kees Nachtegaal
Haaswijkweg W. 42
3319 GD Dordrecht

Hartelijk gefeliciteerd.

▼ Vervolg van pag. 139

Derive-blad

De volgende aanwijzingen kunnen van pas komen bij dit Derive-practicum. De vetgedrukte hoofdletters geven de commando's aan zoals ze achtereenvolgens vanuit het Algebra-hoofdmenu gegeven moeten worden.

Wat wil je?	Hoe doe je dat?
Een wortel met Derive benaderen, bijvoorbeeld $\sqrt{2}$	**A**uthor Intypen: sqrt 2 appro**X**
Een breuk met Derive benaderen, bijvoorbeeld 17/12	**A**uthor Intypen: 17/12 appro**X**
Termen van een iteratief gedefinieerde rij berekenen, bijvoorbeeld 10 termen van de rij die begint met 1 en waarvoor geldt: $a(n+1) = a(n) + 2/a(n)) / 2$	**A**uthor Intypen: iterates $((x + 2/x) / 2, x, 1, 9)$ **S**implify of appro**X**
De precisie instellen, bijvoorbeeld op 10 decimalen	**O**ptions **P**recision Met Tab naar 'Cijfers' springen. Intypen: 10
Een vergelijking oplossen, bijvoorbeeld $x = 2/x$	**A**uthor Intypen: $x = 2/x$ so**L**ve

Mededeling

Post-universitaire cursussen

Van maandag 12 tot en met vrijdag 16 augustus 1996 worden aan de Universiteit van Luik, België, de jaarlijkse post-universitaire cursussen gegeven, met lezingen over wiskundige, natuurkundige, scheikundige en biologische onderwerpen.
De wiskundige lezingen zullen waarschijnlijk gaan over fractals, grafentheorie, Latijnse vierkanten, en de betekenis van voorbeelden. De gebruikte taal is Frans of Engels.

Voor alle informatie:
Mr. Jacques Aghion
Biochemistry, Department of Botany
B22
University of Liège
B-4000
België,
telefoon + 32 (0) 41 663 841
fax + 32 (0) 41 663 840