

Wiswijs

Drs. Fred Pach

Drs. Hans Wisbrun

Vierde druk

Noordhoff Uitgevers Groningen /Utrecht

Ontwerp omslag:
Omslagillustratie:

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB
Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

Aan de totstandkoming van deze uitgave is de uiterste zorg besteed. Voor informatie die desondanks onvolledig of onjuist is opgenomen, aanvaarden auteur(s), redactie en uitgever geen aansprakelijkheid. Voor eventuele verbeteringen van de opgenomen gegevens houden zij zich aanbevolen.



0 / 18

© 2018 Noordhoff Uitgevers bv Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden veeleenvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever. Voor zover het maken van reprografische veeleenvoudingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16h Auteurswet 1912 dient men de daarvoor verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Reprorecht (postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) kan men zich wenden tot Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.stichting-pro.nl).

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

ISBN 978-90-01-87626-5
NUR 123

Voorwoord

Dit is een boek voor volwassenen.

Niet dat er één onvertogen woord in staat, maar bij het schrijven stond ons wel steeds een volwassen student voor ogen. Een student die het geheel, of voor een deel, van zelfstudie moet hebben. Een student die geen behoefte heeft aan overbodige franje. Die de essentiële zaken kort en duidelijk op een rijtje wil hebben, maar ook weer geen genoeg neemt met het openzetten van de trukendoos: hij (of zij) wil wel weten waarom de wiskunde is zoals ze is. Die beseft, dat als je eenmaal iets begrepen hebt, eindeloos oefenen overbodig is.

Voor die student is dit boek.

Structuur

Het boek heeft een duidelijke structuur, met als vaste elementen:

- tien hoofdstukken met de basisstof
- drie appendices in een iets compactere stijl, voor wie meer nodig heeft.

En per hoofdstuk:

- opening
- opsomming van de noodzakelijke voorkennis, met verwijzing naar voorafgaande paragrafen
- motiverende openingscasus
- veel uitgewerkte voorbeelden
- tussen de tekst verwijzingen naar opgaven en naar voorafgaande theorie
- waarschuwingen ('pas op') voor veelgemaakte fouten
- samenvattingen (wat weet en kun je nu?)
- opgaven bij alle onderdelen van de theorie, en extra opgaven voor integratie van de leerstof.

Achter in het boek staan:

- antwoorden bij alle opgaven
- volledige uitwerkingen bij alle opgaven
- trefwoordenregister
- symbolenregister.

Op de website www.wiswijs.noordhoff.nl zijn bij elk hoofdstuk oefentoetsen te vinden, met uitgebreide feedback.

Ontstaan

Het boek is ontstaan vanuit een opfriscursus wiskunde voor studenten aan de Open Universiteit. In de praktijk bleek dat ook mensen zonder veel voorkennis met het materiaal uit de voeten konden. Later gingen ook veel studenten die zich voorbereidden op een studie aan andere universiteiten

(en aan hogescholen) het boek gebruiken. Wiswijs heeft zich sinds zijn ontstaan in 1990 meer dan voldoende bewezen. Er zijn er meer dan 25.000 exemplaren van verkocht.

Inhoud

Wat in de tien hoofdstukken wordt behandeld, is ongeveer de stof van de eerste drie klassen (de onderbouw) van havo/vwo, maar dan beperkt tot de algebra/analyse-lijn. Geen meetkunde, geen goniometrie. De appendices gaan over enkele veelgevraagde onderwerpen die in havo/vwo in de hogere klassen worden behandeld.

Doelgroep

Zelf zien wij als voornaamste doelgroepen:

- mensen die zich, al dan niet via zelfstudie, voorbereiden op een studie aan een universiteit of hogeschool (vooral: psychologie, sociale wetenschappen, bedrijfskunde, economie)
- studenten aan universiteiten en hogescholen die voor hun studie basis-kennis van de wiskunde nodig hebben

Oefentoetsen

Een aanvulling bij Wiswijs is de website www.wiswijs.noordhoff.nl daar aangeboden oefentoetsen zijn tot stand gekomen op basis van ervaringen van diverse docenten die met Wiswijs werken. Onze dank gaat hiervoor uit naar Eva Lobach, Universiteit van Amsterdam/Vrije Universiteit; Luc van Baest, Universiteit van Tilburg en Bert Esmeijer, Wageningen UR.

Bij de vierde druk

Deze druk is niet meer te gebruiken naast de vorige druk. Weliswaar is de wiskundige inhoud ongeveer hetzelfde gebleven, veel voorbeelden zijn door actuelere vervangen. Ook is er een beperkt aantal onderwerpen bij gekomen (zoals: wetenschappelijke notatie, transformaties van grafieken, binomiale verdeling).

Wat vroeger Appendix A (Algebra) was, heet nu Hoofdstuk 10. Dit leek ons in verband met de indeling in onder- en bovenbouwleerstof helderder. Uiteraard zijn er ook allerlei kleinere wijzigingen aangebracht, meestal om didactische redenen.

Al is dit boek niet geschreven voor leerlingen in het voortgezet onderwijs, de (nieuwe) onderwijsprogramma's wiskunde daar zijn bij het schrijven wel goed in het oog gehouden.

Tot slot nog dit: er is geruime tijd gearzeld over de verschillende mogelijke aanspreekvormen. 'U' is wat formeel, 'je' misschien te joviaal en 'we' ('We voeren nu dit of dat in') suggereert dat wiskunde alleen iets is dat ooit door geleerde mensen is bedacht en niet een activiteit van de student zelf. Uiteindelijk is voor 'je' gekozen, omdat wij onze eigen leerlingen en studenten ook zo aanspreken én om te benadrukken dat wiskunde, in onze ogen, vooral iets is wat de student zelf opbouwt. Daarbij wensen we je veel succes.

Amsterdam, voorjaar 2017

Fred Pach & Hans Wisbrun

Inhoud

1 Natuurlijke getallen, breuken 11

- 1.1 Natuurlijke getallen 12
- 1.2 Breuken 21
- 1.3 Rekenen met letters 31
- 1.4 Samenvatting 32
- 1.5 Opgaven 37

2 Gehele getallen, rationale getallen 43

- 2.1 Machtsverheffen, worteltrekken 44
- 2.2 De gehele getallen 48
- 2.3 De rationale getallen 57
- 2.4 Voorrangsregels 59
- 2.5 Samenvatting 61
- 2.6 Opgaven 64

3 Reële getallen 71

- 3.1 Introductie van de reële getallen 72
- 3.2 Intervallen 75
- 3.3 Bewerkingen met reële getallen 78
- 3.4 Manipuleren met wortelvormen 79
- 3.5 Wortels en negatieve getallen 82
- 3.6 Samenvatting 83
- 3.7 Opgaven 85

4 Eerstegraads vergelijkingen en ongelijkheden 91

- 4.1 Open beweringen 92
- 4.2 Eerstegraads vergelijkingen met één variabele 95
- 4.3 Eerstegraads ongelijkheden met één variabele 100
- 4.4 Stelsels van twee eerstegraads vergelijkingen met twee variabelen 104
- 4.5 Samenvatting 110
- 4.6 Opgaven 113

5 Functies en grafieken 121

- 5.1 Functies 122
- 5.2 Het rechthoekig assenstelsel 126
- 5.3 Grafieken van functies 128
- 5.4 Samenvatting 133
- 5.5 Opgaven 136

6 Eerstegraads functies en hun grafieken 141

- 6.1 Eerstegraads functies en constante functies 142
- 6.2 Helling en richtingscoëfficiënt 146
- 6.3 Van functievoorschrift naar grafiek 150
- 6.4 Van grafiek naar functievoorschrift 154
- 6.5 Andere vergelijkingen bij een rechte lijn 156
- 6.6 Het snijpunt van twee grafieken 158
- 6.7 Eerstegraads ongelijkheden grafisch oplossen 160
- 6.8 Samenvatting 164
- 6.9 Opgaven 169

7 Tweedegraads functies en hun grafieken 177

- 7.1 Tweedegraads functies en hun grafieken 178
- 7.2 Snijpunten met de x -as 186
- 7.3 De abc -formule 188
- 7.4 Snijpunten van een parabool en een rechte lijn of van twee parabolen 192
- 7.5 Tweedegraads ongelijkheden 195
- 7.6 Samenvatting 198
- 7.7 Opgaven 203

8 Nog meer functies en grafieken 211

- 8.1 Manieren om een verband weer te geven 212
- 8.2 Allerlei functies 215
- 8.3 Functies combineren 223
- 8.4 Inverse functies 228
- 8.5 Transformaties 232
- 8.6 Samenvatting 237
- 8.7 Opgaven 240

9 Wiskunde gebruiken 249

- 9.1 Tabel, grafiek, werkelijkheid 250
- 9.2 Vormgeving van grafieken 253
- 9.3 Wat vertellen grafieken? 261
- 9.4 Tabellen, grafieken en formules 265
- 9.5 Modelleren 268
- 9.6 Samenvatting 271
- 9.7 Opgaven 275

10 Algebra 285

- 10.1 Opnieuw de verdeel eigenschap 286
- 10.2 Vergelijkingen oplossen door splitsen 293
- 10.3 Vergelijkingen oplossen door vereenvoudigen 297
- 10.4 Tweedegraads vergelijkingen en de *abc*-formule 302
- 10.5 Samenvatting 306
- 10.6 Opgaven 311

Appendices

A Machten en logaritmen 317

- A.1 Machten met negatieve exponenten en met exponent nul 318
- A.2 Wetenschappelijke notatie 320
- A.3 Machten met niet-gehele exponenten 322
- A.4 Exponentiële functies 324
- A.5 Logaritmen en logaritmische functies 325
- A.6 Rekenen met machten en logaritmen 328
- A.7 Oplossen van vergelijkingen met machten 332
- A.8 Samenvatting 333
- A.9 Opgaven 336

B Differentiëren 343

- B.1 De helling van een grafiek; verandering van functiewaarde 344
- B.2 Differentiëren van enkelvoudige functies 349
- B.3 Differentiëren van eenvoudige combinaties van functies 353
- B.4 De kettingregel 356
- B.5 De productregel en de quotiëntregel 359
- B.6 Differentiëren van exponentiële en logaritmische functies 362
- B.7 Stijgen en dalen; maxima en minima 367
- B.8 Samenvatting 373
- B.9 Opgaven 376

C Kansrekening en combinatoriek 383

- C.1 Kansen 384
- C.2 Mogelijkheden, boomdiagrammen 388
- C.3 Permutaties 392
- C.4 Combinaties 395
- C.5 Binomiale verdelingen 399
- C.6 Samenvatting 403
- C.7 Opgaven 404

- Antwoorden 409**
- Uitwerkingen 461**
- Trefwoordenregister 551**
- Symbolenregister 552**

Studiewijzer

Ieder maakt op eigen wijze gebruik van dit boek. Als je al veel voorkennis hebt, is de inhoud van dit boek om je wiskundekennis op te frissen. Als je nog niet zo veel van wiskunde weet, kun je dit boek gebruiken om je in korte tijd de nodige basiskennis eigen te maken.

Een belangrijk hulpmiddel bij het bestuderen van dit boek is het verwijsteken. [adjust to style as in chapter 5] Het verwijst ofwel naar opgaven, ofwel naar voorkennis die je op dat moment nodig hebt. Afhankelijk van je wiskundevoorgeschiedenis kun je dat teken volgen of negeren.

De meeste voorkennis wordt in het boek zelf aangedragen. Een verwijzing daarnaar gaat dan ook altijd naar bepaalde paragrafen in het boek. Heb je het boek vanaf het allereerste begin hoofdstuk voor hoofdstuk bestudeerd, dan is terugbladeren meestal niet nodig. Hooguit zou je dat kunnen doen om je geheugen even op te frissen. Ben je echter ergens middenin het boek begonnen (bijvoorbeeld bij de Appendices) en kom je bij een begrip dat je niet meer kent, dan kun je – via dat verwijsteken – het beste even terugbladeren. Achterin staat ook een index.

Ook de verwijzingen naar opgaven kun je al dan niet volgen. Als je al helemaal vertrouwd bent met de theorie en de voorbeelden die vóór (en soms na) zo'n teken staan, dan kun je deze opgaven negeren. Maar als je niet helemaal zeker weet of je het echt in de vingers hebt, dan kun je het beste direct de opgave(n) maken waarnaar verwezen wordt, en daarna, achterin het boek, je antwoorden controleren. Zijn deze goed, dan ga je weer terug naar waar je gebleven was.

Direct na de samenvatting van elk hoofdstuk wordt verwezen naar opgaven die een iets hogere moeilijkheidsgraad hebben. Kun je die aan, dan heb je het hoofdstuk wel door. Lukt er iets niet, zorg dan dat je in ieder geval de uitwerkingen ervan achterin het boek begrijpt.

De opgaven staan steeds aan het eind van het hoofdstuk. Alle antwoorden staan bij elkaar achter in het boek, en daar weer achter vind je ook de volledige uitwerkingen.

Mensen zijn soms een beetje lui, daarom is het gedeelte met uitwerkingen zo verleidelijk. Maak er echter een verstandig gebruik van. Grijp niet bij iedere hobbel tijdens het maken van de opgaven direct naar de uitwerkingen. Je leert het meest als je blijft proberen en uiteindelijk je eigen antwoord met dat achter in het boek vergelijkt. Hopelijk klopt het. Probeer anders eerst nog te ontdekken waar je fouten zou kunnen hebben gemaakt. Ga pas, als je het echt niet meer weet, naar de uitwerkingen. Die vormen alleen een soort vangnet. Ook bij opgaven die je goed had, kan het nuttig

zijn om achteraf naar de uitwerkingen te kijken. Soms zie je dan een andere, handiger, aanpak. Overigens staat er in de uitwerkingen meestal maar één mogelijke (en uiteraard goede) oplossingsmethode. Als jij het juiste antwoord hebt, maar een andere oplossingsmethode, dan wil dat niet zeggen dat je het fout hebt gedaan. Raadpleeg in zo'n geval bij twijfel een deskundige, een docent bijvoorbeeld.

Weet je op een gegeven moment echt niet meer waar het in de tekst over gaat, probeer dan – als er geen verwijsteken staat – zelf een trefwoord of trefwoorden op te sporen daar waar je het spoor bijster bent geraakt. Via het trefwoordenregister (of via het symbolenregister) kun je weer op de juiste weg raken. Daar staat namelijk achter elk begrip of symbool het paginanummer van de bladzijde waarop het geïntroduceerd werd.

Als je denkt dat je een hoofdstuk beheerst, maak dan een bijbehorende (multiplechoice)toets op www.wiswijs.noordhoff.nl. Je antwoorden kun je online laten nakijken en je krijgt daarbij een score, uitleg bij de vragen die je niet goed had en een gedetailleerd studieadvies. Als je wilt kun je daar over hetzelfde hoofdstuk nog een nieuwe toets maken.

Rest ons nog de wijsheid uit te dragen dat wiskunde niet iets is wat je tot je neemt, maar iets wat je doet.

Fred Pach & Hans Wisbrun