NEW ZEALAND QUALIFICATIONS AUTHORITY
MANA TOHU MĀTAURANGA O AOTEAROA

QUALIFY FOR THE FUTURE WORLD
KIA NOHO TAKATŪ KI TŌ ĀMUA AO!

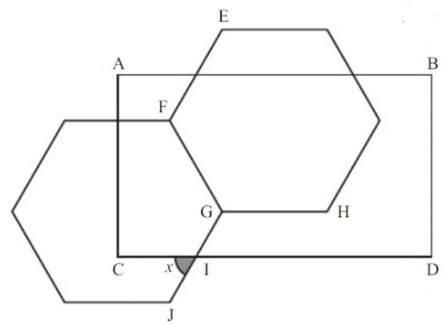
Level 1 Mathematics and Statistics, 2017

http://www.nzqa.govt.nz/nqfdocs/ncea-resource/exams/2017/91031-exm-2017.pdf

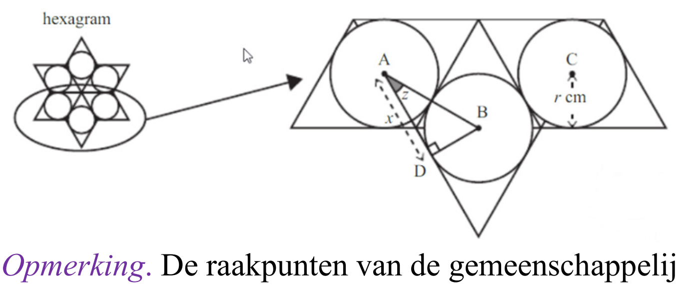
9.30 a.m. Monday 20 November 2017
Credits: Four

Oplossingen door Dick Klingens

VRAAG 1



a. Ook is CD // Jh (Jh is een zijde van de zeshoek links; h is het eindpunt van de zijde).
Dan is: $\angle CIJ + \angle hJI = 180^\circ$, terwijl $\angle hJI = 120^\circ$ (het is een hoek van de zeshoek).
Dus: $x = \angle CIJ = 60^\circ$.



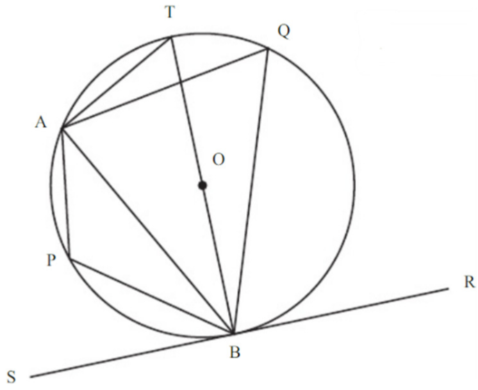
Opmerking. De raakpunten van de gemeenschappelijke raaklijn van de cirkels (A) en (B) vallen (natuurlijk?) samen. Maar moet dat niet eerst bewezen worden? Of wordt dat bekend verondersteld? ◊

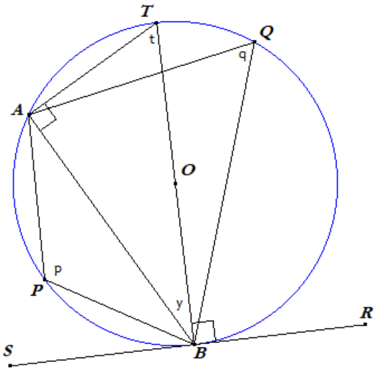
b(i). *Te bewijzen*: $z = 30^\circ$.

Bewijs. $BD = r$, $AB = 2r$, zodat $\sin(BAD) = \sin z = \dfrac{BD}{AD} = \frac{1}{2}$. En dan is $z = 30^\circ$.

b(ii). Nu is verder, volgens de stelling van Pythagoras, in driehoek ABD met $AD = x$:
$AB^2 = AD^2 + BD^2$ of ook $4r^2 = x^2 + r^2$

Zodat:
$x^2 = 3r^2$; en daaruit volgt dat $x = r\sqrt{3}$.





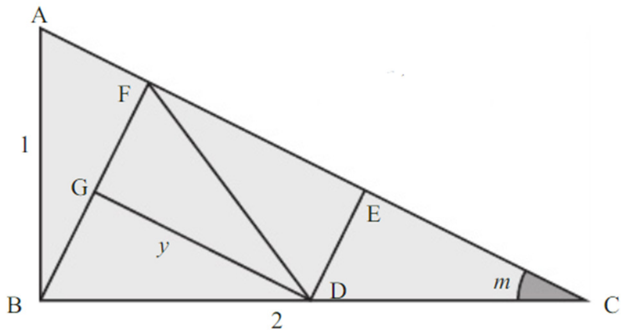
c. *Te bewijzen*: $\angle ABS = \angle AQB$
Bewijs. Tja, als je er van uitgaat dat er bij de kandidaten enige basiskennis is van omtrekshoeken, dan is het volgende mijns inziens voldoende.

$\angle ABS = \frac{1}{2}\,\text{bg}(APB)$ en $\angle AQB = \frac{1}{2}\,\text{bg}(APB)$; het zijn resp. de hoek tussen een raaklijn en een koorde naar het raakpunt en een omtrekshoek op dezelfde cirkel.
En daaruit volgt hetgeen te bewijzen was direct.

Maar dat punt T en de middellijn TB zijn er natuurlijk niet voor niets erbij gezet. En dan zou het als volgt kunnen (met gebruik van de letters in de hoeken van de rechter, door mij getekende, figuur).
In driehoek ABT is $t + y = 90^\circ$ (*Thales-driehoek*) of ook $t = 90^\circ - y$.
Dan is $\angle ABS = 90^\circ - y = t$
En er zijn ook twee koordenvierhoeken (*).
In $APBQ$ is $p + q = 180^\circ$ en in $APBT$ is $p + t = 180^\circ$; zodat $t = q$.
En daarmee is bewezen dat $\angle ABS = t = q = \angle AQB$.

(*) Maar hebben leerlingen in New Zealand op 'Level 1' (uitgebreide) kennis van koordenvierhoeken?

VRAAG 2



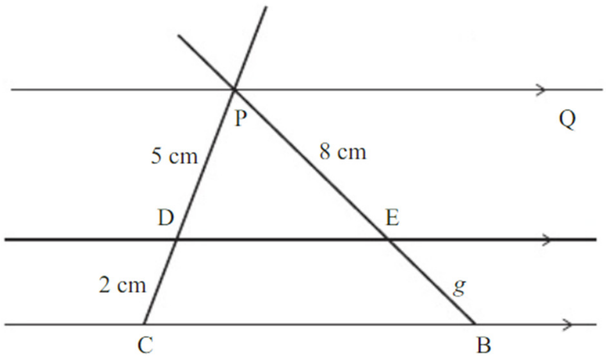
a(i). $\tan(ACB) = \tan m = \dfrac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$. Dan is $m = \arctan(\frac{1}{2}) \approx 26{,}6^\circ$.

Gevolg. $\cos m = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

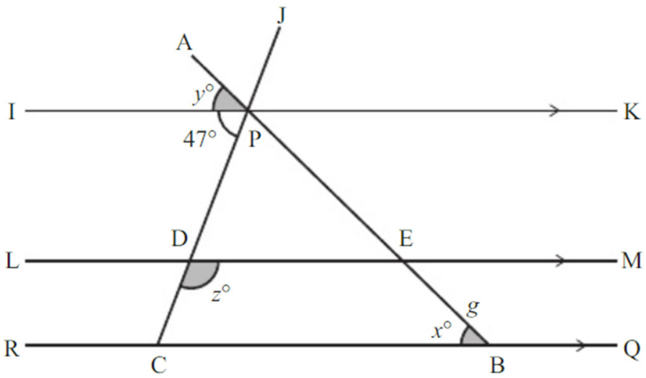
a(ii). Volgens het gegeven zijn de 'inwendige' driehoeken congruent (*identical*).
Dus is $BD = CD = 1$.

In driehoek BDG is dan ook $\angle GDB = m$. En dan is in deze driehoek $\cos m = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{DG}{DB} = \dfrac{y}{1}$

Met andere woorden: $y = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

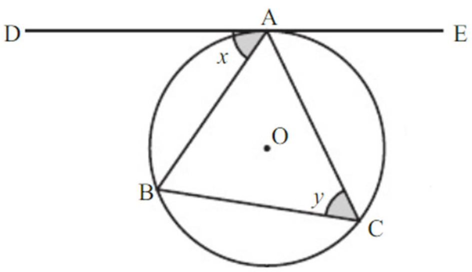


b(i). Volgens de 'eerste stelling van Thales" is in bovenstaande figuur:
$PD : DC = PE : EB$ of $5 : 2 = 8 : g$
Waaruit volgt dat $g = \frac{16}{5}$ cm.



Opmerking. Zie bovenstaande figuur. Er wordt in dit examen *niet eenduidig* gewerkt met variabelen (onbekenden). In de opgaven tot nu toe werd de grootte van een hoek (als variabele c.q. constante) aangegeven met een letter, bijvoorbeeld x, en werd de numerieke waarde van x voorzien van de eenheid graad (°).
In het volgende onderdeel zijn de gebruikte variabelen blijkbaar *reële* getallen! Zie immers bovenstaande figuur waarin nu bijvoorbeeld $\angle CBE = x^o$ (en er staat *niet* $\angle CBE = x$). ◊

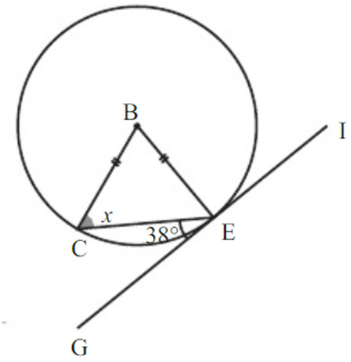
b(ii). Ik laat het graadteken bij de letters x, y, z weg.
Nu is, met $\angle P$ in driehoek PDE:
$y = 180^o - 47^o - \angle P = 133^o - \angle P$
En in driehoek PDE is in de eerste plaats $\angle E = x$ (immers $LM \,//\, RQ$). Verder is:
$\angle P = 180^o - (\angle D + \angle E) = 180^o - ((180^o - z) + x) = z - x$
Zodat:
$y = 133^o - (z - x)$ en daarmee is $x = y + z - 133^o$.



c. *Te bewijzen*: $x = y$.
Opmerking. Zie ook vraag 1 onderdeel c. ◊

Bewijs. $\angle ACB = y = ½$ bg(AB) en $\angle DAB = x = ½$ bg(AB).
Conclusie: $x = y$.

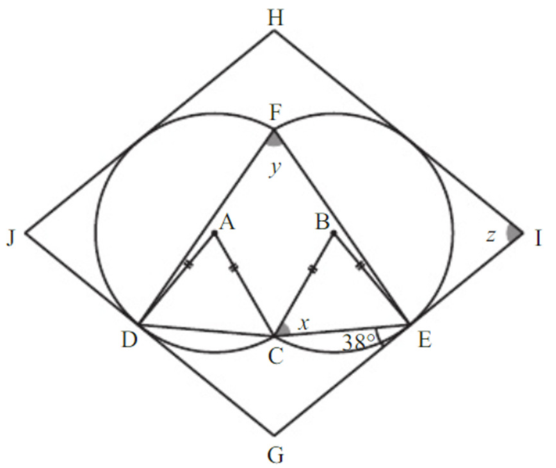
VRAAG 3



Opmerking. Zie ook vraag 2, onderdeel c. ◊

a(i). Ik ga ervan uit dat de lijn *GI* in het punt *E* raakt aan de cirkel (**een kwalijke omissie van de examenmaker(s)!!**)

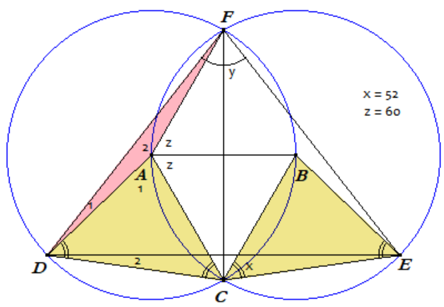
$\angle BEG = 90°$ (raaklijn loodrecht op raakstraal). Dus $\angle BEC = 90° - 38° = 52°$. En daarbij is driehoek *BCE* een gelijkbenige driehoek met top *B*, zodat $x = \angle ECB = 52°$.



a(ii). In dit onderdeel moet de waarde van $y = \angle DFE$ berekend worden.
Omdat $AB = AC = BC$ is $\angle BCA = 60°$. En in onderdeel a(i) heb ik laten zien dat $x = 52°$.
Dus is $\angle ECD = 2 \cdot 52° + 60° = 164°$.
In vierhoek *CDGE* is nu $\angle DCE = 360° - 164° = 196°$.
Dus in die vierhoek (en ook in vierhoek *DGEF*) is $\angle EGD = 360° - 196° - 2 \cdot 38° = 88°$.

Maar de waarde van *y* zullen we toch wel in een driehoek moeten vinden.
En hier wordt het vraagstuk mijns inziens wat moeilijker.

Het ligt voor de hand dit te doen in de gelijkbenige driehoek *DEF* (met top *F*); zie onderstaande figuur.

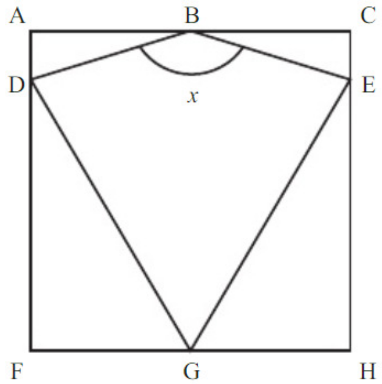


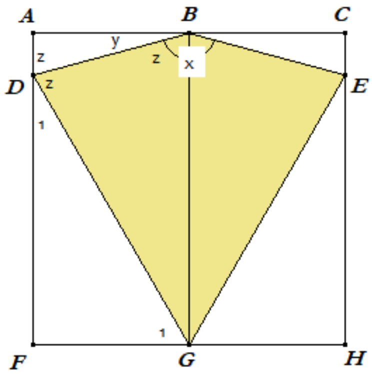
Met (hier in de laatste tekening) $x = 52°$ en $z = 60°$ is nu $\angle A_1 = 180° - 2x = 180° - 104° = 76°$ en $\angle A_2 = 360° - 120° - 76° = 164°$.
Dan is $\angle D_1 = ½(180° - \angle A_2) = ½(180° - 164°) = 8°$.
Verder is $\angle D_2 = ½(180_o - \angle ECD) = ½(180° - 164°) = 8°$. En dan blijkt (*):

$\angle EDF = \angle CDA = 52^\circ$
Zodat $y = 180^\circ - 2 \cdot 52^\circ = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$.

(*) Overigens, dat $\angle EDF = \angle CDA$ is, is uiteraard onafhankelijk van de waarde van x.

a(iii). In dit onderdeel moet de waarde van $z = \angle HIG$ berekend worden. Zie weer de eerste figuur bij onderdeel a(ii).
Gegeven is dat *HIGJ* een ruit is. Dus is:
$z = \angle HIG = 180^\circ - \angle EGD = 180^\circ - 88^\circ = 92^\circ$.





b. In de rechter figuur hierboven ben ik ervan uitgegaan dat de punten B en G de middens zijn van de zijden AC en FH van het vierkant (*).
Vanwege de symmetrie in BG is dan $z = \angle DBG = \frac{1}{2}x$.
Omdat driehoek BDG gelijkbenig is (met top G) is ook $\angle GDB = z$.
Met $y = \angle ABD$ is $y + z = 90^\circ$ (bij punt B), zodat dan ook in de in A rechthoekige driehoek ABD geldt dat $\angle BDA = z$.
Met $FG = \frac{1}{2}FH = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2}GD$ is driehoek DFG een '30-60-90-driehoek': $\angle D_1 = 30^\circ$.
En daarmee is $z = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$. Dus:
$x = 2z = 150^\circ$

(*) Moet eigenlijk niet eerst bewezen worden dat B en G middens zijn van de zijden? Of volgt dat 'direct' uit het feit dat $ACHF$ een vierkant is en $BDGE$ een ruit?

======

Naschrift

NCEA Level 1 Mathematics examination

21 Nov 2017

The New Zealand Qualifications Authority (NZQA) is confident in the quality of the Level 1 Mathematics examination which met the specifications available to schools in advance of the school year. All NCEA assessments are aligned to the standard and the New Zealand Curriculum. The Level 1 Mathematics examination was set by a team of experienced mathematics teachers, for the right curriculum level, and is consistent with the specifications for the standard.

Students may find some questions in examinations more difficult than others, especially those parts of the question aimed at excellence. Parts of the examination will be challenging, but students often do better than they expect.

Each year we update our assessment specifications. Teachers are familiar with this process and will check the assessment specifications for changes. These assessment specifications include changes to the format of examination questions, as was the case in one of the three standards assessed in the Level 1 Mathematics and Statistics examination yesterday.

We provide ongoing communication about examinations through a number of channels including publication of resources about particular standards, including examples of the types of questions that will be asked. We also send emails and circulars to schools. This examination was featured in the workshops run by the New Zealand Association of Maths Teachers and supported by NZQA earlier in the year.

Media contact:
NZQA Communications
media@nzqa.govt.nz or 027 457 5783