Dinsdag 18 juli 2017

Opgave 1. Voor elk geheel getal $a_0 > 1$ definiëren we de rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ door:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{als } \sqrt{a_n} \text{ geheel is,} \\ a_n + 3 & \text{anders,} \end{cases} \qquad \text{voor elke } n \geqslant 0.$$

Bepaal alle waarden van a_0 waarvoor er een getal A is zodanig dat $a_n = A$ voor oneindig veel waarden van n.

Opgave 2. Zij $\mathbb{R}$ de verzameling reële getallen. Bepaal alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodanig dat, voor alle reële getallen x en y,

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Opgave 3. Een jager en een onzichtbaar konijn spelen een spel in het euclidisch vlak. Het startpunt A_0 van het konijn en het startpunt B_0 van de jager zijn gelijk. Na $n-1$ rondes van het spel is het konijn in punt A_{n-1} en de jager in punt B_{n-1}. In de n^{de} ronde van het spel gebeuren er achtereenvolgens drie dingen.

(i) Het konijn verplaatst zich onzichtbaar naar een punt A_n zodanig dat de afstand tussen A_{n-1} en A_n precies 1 is.

(ii) Een traceersysteem rapporteert een punt P_n aan de jager. De enige garantie die het traceersysteem de jager biedt, is dat de afstand tussen P_n en A_n hoogstens 1 is.

(iii) De jager verplaatst zich zichtbaar naar een punt B_n zodanig dat de afstand tussen B_{n-1} en B_n precies 1 is.

Is het voor de jager altijd mogelijk om — ongeacht hoe het konijn zich verplaatst en welke punten het traceersysteem rapporteert — zijn verplaatsingen zodanig te kiezen dat na 10^9 rondes de afstand tussen hem en het konijn hoogstens 100 zal zijn?

Woensdag 19 juli 2017

Opgave 4. Laat R en S verschillende punten op een cirkel Ω zijn zodanig dat lijnstuk RS geen middellijn van Ω is. Zij ℓ de raaklijn aan Ω in R. Zij punt T zodanig dat S het midden is van lijnstuk RT. Het punt J ligt op de korte boog RS van Ω zodanig dat de omgeschreven cirkel Γ van driehoek JST lijn ℓ snijdt in twee verschillende punten. Zij A het snijpunt van Γ en ℓ dat het dichtst bij R ligt. De lijn AJ snijdt Ω opnieuw in K. Bewijs dat lijn KT raakt aan Γ.

Opgave 5. Zij gegeven een geheel getal $N \geqslant 2$. Een groep van $N(N+1)$ voetballers, allemaal van verschillende lengte, staat op een rij. De bondscoach wil $N(N-1)$ voetballers uit deze rij verwijderen zodat een rij van $2N$ voetballers overblijft die aan de volgende N voorwaarden voldoet:

(1) er staat niemand tussen de twee langste voetballers,

(2) er staat niemand tussen de op twee na langste en de op drie na langste voetballer,

$\vdots$

(N) er staat niemand tussen de twee kortste voetballers.

Bewijs dat dit altijd mogelijk is.

Opgave 6. Een geordend paar gehele getallen (x, y) is een *primitief roosterpunt* als de grootste gemene deler van x en y gelijk aan 1 is. Gegeven een eindige verzameling S van primitieve roosterpunten, bewijs dat er een (strikt) positief geheel getal n en gehele getallen a_0, a_1, …, a_n bestaan zodanig dat voor alle (x, y) in S geldt dat

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$