A. M. Yaglom, I. M. Yaglom, An elementary derivation of the formulas of Wallis, Leibnitz and Euler for the number π, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1953, Volume 8, Issue 5(57), 181–187

1953 г. сентябрь—октябрь т. VIII, вып. 5 (57)

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ВЫВОД ФОРМУЛ ВАЛЛИСА, ЛЕЙБНИЦА И ЭЙЛЕРА ДЛЯ ЧИСЛА π

А. М. Яглом и И. М. Яглом

В высшей математике выводится большое число формул, выражающих число π в виде бесконечной суммы или бесконечного произведения. Наиболее известны из них формула Валлиса

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots=\frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

формула Лейбница

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4} \tag{2}$$

и формула Эйлера

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}. \tag{3}$$

Эти формулы обыкновенно доказываются в вузах при изучении интегрального исчисления (формула Валлиса), теории разложения функций в степенные ряды (формула Лейбница) и в тригонометрические ряды (формула Эйлера). Нам кажется, что для преподавателей высшей алгебры в университетах и, особенно, в пединститутах может представлять интерес также следующий простой вывод этих формул, опирающийся только на правила действий с комплексными числами и элементы алгебры многочленов; этот вывод по существу доступен даже школьнику.

А. Формула Эйлера. Наиболее просто и неожиданно коротко элементарное доказательство формулы (3). Из формулы Муавра

$$\cos n\alpha+i\sin n\alpha=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=$$
$$=\cos^n\alpha+iC_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha-iC_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+\ldots \tag{4}$$

следует:

$$\sin n\alpha=C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha-\ldots \tag{5}$$

или

$$\sin n\alpha=\sin^n\alpha\,(C_n^1\operatorname{ctg}^{n-1}\alpha-C_n^3\operatorname{ctg}^{n-3}\alpha+C_n^5\operatorname{ctg}^{n-5}\alpha-\ldots). \tag{6}$$

Пусть теперь $n=2m+1$ нечётно. Если α равно $\frac{k\pi}{n}=\frac{k\pi}{2m+1}$, $k=1, 2, \ldots, m$, то $\sin n\alpha=0$, а $\sin\alpha\neq 0$; следовательно,

$$C_{2m+1}^1 \operatorname{ctg}^{2m}\alpha - C_{2m+1}^3 \operatorname{ctg}^{2m-2}\alpha + C_{2m+1}^5 \operatorname{ctg}^{2m-4}\alpha - \ldots = 0.$$

Таким образом, мы видим, что уравнение

$$C_{2m+1}^1 x^m - C_{2m+1}^3 x^{m-1} + C_{2m+1}^5 x^{m-2} - \ldots = 0 \qquad (7)$$

имеет корни

$$x_k=\operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{2m+1}=\operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{n}, \quad k=1, 2, \ldots, m. \qquad (8)$$

Воспользовавшись выражением суммы корней уравнения через его коэффициенты, найдём:

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}+\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{n}+\ldots+\operatorname{ctg}^2\frac{m\pi}{n}=\frac{C_n^3}{C_n^1}=\frac{(n-1)(n-2)}{6}. \qquad (9)$$

Но $\operatorname{cosec}^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha+1$; значит

$$\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{n}+\operatorname{cosec}^2\frac{2\pi}{n}+\ldots+\operatorname{cosec}^2\frac{m\pi}{n}=\frac{(n-1)(n-2)}{6}+\frac{n-1}{2}=\frac{(n-1)(n+1)}{6}. \qquad (10)$$

Так как для углов первой четверти $\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha$ и, следовательно, $\operatorname{cosec}\alpha>\frac{1}{\alpha}>\operatorname{ctg}\alpha$, то из (9) и (10) вытекает, что

$$\frac{1}{6}(n-1)(n-2)<\left(\frac{n}{\pi}\right)^2+\left(\frac{n}{2\pi}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{m\pi}\right)^2<\frac{1}{6}(n-1)(n+1),$$

т. е.

$$\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{m^2}<\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right), \qquad (11)$$

где $n=2m+1$. Но при $m\to\infty$ правая и левая части последнего двойного неравенства стремятся к одному и тому же пределу $\frac{\pi^2}{6}$. Отсюда сразу получается формула Эйлера (3).

Совершенно так же можно получить последующие формулы Эйлера для сумм обратных величин чётных степеней чисел натурального ряда. Например, так как сумма s_1 корней уравнения (7) равна $\frac{C_n^3}{C_n^1}=\frac{(n-1)(n-2)}{6}$, а сумма s_2 попарных произведений этих корней равна $\frac{C_n^5}{C_n^1}=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}$, то имеем

$$\operatorname{ctg}^4\frac{\pi}{n}+\operatorname{ctg}^4\frac{2\pi}{n}+\ldots+\operatorname{ctg}^4\frac{m\pi}{n}=s_1^2-2s_2=$$
$$=\frac{(n-1)^2(n-2)^2}{36}-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{60}=\frac{(n-1)(n-2)(n^2+3n-13)}{90}. \qquad (12)$$

Учитывая, что $\operatorname{cosec}^4\alpha=(\operatorname{ctg}^2\alpha+1)^2=\operatorname{ctg}^4\alpha+2\operatorname{ctg}^2\alpha+1$, получим:

$$\operatorname{cosec}^4\frac{\pi}{n}+\operatorname{cosec}^4\frac{2\pi}{n}+\ldots+\operatorname{cosec}^4\frac{m\pi}{n}=$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)(n^2+3n-13)}{90}+\frac{(n-1)(n-2)}{3}+\frac{n-1}{2}=\frac{(n^2-1)(n^2+11)}{90}. \qquad (13)$$

Из (12) и (13) вытекает двойное неравенство

$$\frac{(n-1)(n-2)(n^2+3n-13)}{90}<\left(\frac{n}{\pi}\right)^4+\left(\frac{n}{2\pi}\right)^4+\ldots+\left(\frac{n}{m\pi}\right)^4<\frac{(n^2-1)(n^2+11)}{90}$$

или

$$\frac{\pi^4}{90}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}-\frac{13}{n^2}\right) < 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{m^4} < \frac{\pi^4}{90}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{11}{n^2}\right) \quad (14)$$

($n=2m+1$). При $m\to\infty$ найдём:

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}. \quad (15)$$

Для вычисления суммы общего ряда

$$1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{4^{2k}}+\ldots \quad (16)$$

надо воспользоваться формулами Ньютона, позволяющими выразить сумму n-х степеней корней уравнения через его коэффициенты и суммы предшествующих степеней корней. Отсюда нетрудно доказать, что сумма ряда (16) равна $\frac{2^{2k-1}(-1)^{k-1}B_{2k}}{(2k)!}\pi^{2k}$, где B_{2k} есть $2k$-е число Бернулли, определяемое известным рекуррентным соотношением.

Б. Формула Лейбница. Из (4) имеем:

$$\cos n\alpha=\cos^n\alpha-C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha+C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha-\ldots \quad (17)$$

Разделив (17) на (5), получим:

$$\operatorname{ctg} n\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^n\alpha-C_n^2\operatorname{ctg}^{n-2}\alpha+C_n^4\operatorname{ctg}^{n-4}\alpha-\ldots}{C_n^1\operatorname{ctg}^{n-1}\alpha-C_n^3\operatorname{ctg}^{n-3}\alpha+C_n^5\operatorname{ctg}^{n-5}\alpha-\ldots}. \quad (18)$$

Пусть теперь $n=2m$ чётное число. Если α равно $\frac{(4k+1)\pi}{4n}$, $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$, то $\operatorname{ctg} n\alpha=1$; следовательно, для этих α

$$\frac{\operatorname{ctg}^n\alpha-C_n^2\operatorname{ctg}^{n-2}\alpha+C^4\operatorname{ctg}^{n-4}\alpha-\ldots}{C_n^1\operatorname{ctg}^{n-1}\alpha-C_n^3\operatorname{ctg}^{n-3}\alpha+C_n^5\operatorname{ctg}^{n-5}\alpha-\ldots}=1.$$

Отсюда вытекает, что уравнение

$$x^n-C_n^1x^{n-1}-C_n^2x^{n-2}+C_n^3x^{n-3}+C_n^4x^{n-4}-C_n^5x^{n-5}-\ldots=0 \quad (19)$$

имеет корни

$$x_k=\operatorname{ctg}\frac{(4k+1)\pi}{4n}, \quad k=0, 1, 2, \ldots n-1. \quad (20)$$

Но, очевидно, $x_{n-1}=\operatorname{ctg}\frac{(4n-3)\pi}{4n}=-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4n}$, $x_{n-2}=\operatorname{ctg}\frac{(4n-7)\pi}{4n}=-\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4n}, \ldots$ $\ldots, x_m=\operatorname{ctg}\frac{(2n+1)\pi}{4n}=-\operatorname{ctg}\frac{(2n-1)\pi}{4n}$, поэтому формула для суммы корней уравнения даёт:

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4n}+\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4n}-\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4n}+\ldots+\operatorname{ctg}\frac{(2n-3)\pi}{4n}-\operatorname{ctg}\frac{(2n-1)\pi}{4n}=C_n^1=n. \quad (21)$$

Так как

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}=\sin(\beta-\alpha)\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta,$$

то из (21) следует:

$$\sin\frac{\pi}{2n}\left\{\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4n}\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{4n}+\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{4n}\operatorname{cosec}\frac{7\pi}{4n}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\operatorname{cosec}\frac{(2n-3)\pi}{4n}\operatorname{cosec}\frac{(2n-1)\pi}{4n}\right\}=n. \quad (22)$$

С другой стороны,

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}(\beta-\alpha)(1+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta)$$

$\left(\text{ибо } \operatorname{ctg}(\beta-\alpha) = \frac{1+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}\right)$; следовательно, будем иметь:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4n}+\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4n}+\ldots+\operatorname{ctg}\frac{(2n-3)\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{(2n-1)\pi}{4n}+\frac{n}{2}\right\} = n. \quad (23)$$

Но для углов первой четверти $\operatorname{cosec}\alpha > \frac{1}{\alpha} > \operatorname{ctg}\alpha$ (ибо $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$). Учитывая это, получим из равенств (22) и (23)

$$\frac{1}{\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{3\pi}{4n}}+\frac{1}{\frac{5\pi}{4n}\cdot\frac{7\pi}{4n}}+\ldots+\frac{1}{\frac{(2n-3)\pi}{4n}\cdot\frac{(2n-1)\pi}{4n}} < \frac{n}{\sin\frac{\pi}{2n}} \quad (24)$$

и, соответственно,

$$\frac{1}{\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{3\pi}{4n}}+\frac{1}{\frac{5\pi}{4n}\cdot\frac{7\pi}{4n}}+\ldots+\frac{1}{\frac{(2n-3)\pi}{4n}\cdot\frac{(2n-1)\pi}{4n}}+\frac{n}{2} > \frac{n}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}},$$

так что

$$\frac{1}{\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{3\pi}{4n}}+\frac{1}{\frac{5\pi}{4n}\cdot\frac{7\pi}{4n}}+\ldots+\frac{1}{\frac{(2n-3)\pi}{4n}\cdot\frac{(2n-1)\pi}{4n}} > \frac{n}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}-\frac{n}{2}. \quad (25)$$

Левая часть неравенств (24) и (25) равна

$$\frac{8n^2}{\pi^2}\left(\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2}{(2n-3)(2n-1)}\right) =$$
$$= \frac{8n^2}{\pi^2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right).$$

Отсюда вытекает, что эти два неравенства можно объединить в следующие:

$$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} > 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1} > \frac{\pi}{4}\left\{\frac{\frac{\pi}{2n}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}-\frac{\pi}{4n}\right\}. \quad (26)$$

При $n\to\infty$ получаем формулу Лейбница (2).

Из уравнения (19) можно получить и дальнейшие следствия. Так, например, вычисляя сумму квадратов корней этого уравнения, получим:

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{4n}+\operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{4n}+\operatorname{ctg}^2\frac{5\pi}{4n}+\ldots+\operatorname{ctg}^2\frac{(2n-1)\pi}{4n} = (C_n^1)^2+2C_n^2 = n(2n-1), \quad (27)$$

откуда следует также, что

$$\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4n}+\operatorname{cosec}^2\frac{3\pi}{4n}+\operatorname{cosec}^2\frac{5\pi}{4n}+\ldots+\operatorname{cosec}^2\frac{(2n-1)\pi}{4n} = n(2n-1)+n = 2n^2. \quad (28)$$

Из (27) и (28) вытекает двойное неравенство

$$n(2n-1) < \left(\frac{4n}{\pi}\right)^2+\left(\frac{4n}{3\pi}\right)^2+\left(\frac{4n}{5\pi}\right)^2+\ldots+\left(\frac{4n}{(2n-1)\pi}\right)^2 < 2n^2$$

или

$$\frac{\pi^2}{8}\left(1-\frac{1}{2n}\right) < 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2} < \frac{\pi^2}{8}, \quad (29)$$

откуда следует:

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8} \tag{30}$$

— формула, эквивалентная формуле Эйлера (3).

Точно так же, вычисляя сумму кубов, четвёртых степеней, пятых степеней и т. д. корней уравнения (19), можно получить следующий ряд формул:

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots=\frac{\pi^3}{32}, \tag{31}$$

$$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{96} \tag{32}$$

(эта формула эквивалентна формуле (15)),

$$1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\ldots=\frac{5\pi^5}{1536} \tag{33}$$

и т. д. (Все эти формулы тоже впервые были выведены Эйлером.)

В. Формула Валлиса. Формулы (5) и (17) для чётного $n=2m$ можно переписать в следующем виде:

$$\sin 2m\alpha=\cos\alpha\sin\alpha\,\{C_{2m}^1(1-\sin^2\alpha)^{m-1}-C_{2m}^3(1-\sin^2\alpha)^{m-2}\sin^2\alpha+ \\ +C_{2m}^5(1-\sin^2\alpha)^{m-3}\sin^4\alpha-\ldots+(-1)^m C_{2m}^{2m-1}\sin^{2m-2}\alpha\} \tag{34}$$

и

$$\cos 2m\alpha=(1-\sin^2\alpha)^m-C_{2m}^2(1-\sin^2\alpha)^{m-1}\sin^2\alpha+ \\ +C_{2m}^4(1-\sin^2\alpha)^{m-2}\sin^4\alpha-\ldots+(-1)^{m-1}C_{2m}^{2m}\sin^{2m}\alpha. \tag{35}$$

Отсюда, в точности как выше, получаем, что уравнения

$$C_{2m}^1(1-x)^{m-1}-C_{2m}^3(1-x)^{m-2}x+C_{2m}^5(1-x)^{m-3}x^2-\ldots \\ \ldots+(-1)^{m-1}C_{2m}^{2m-1}x^{m-1}=0 \tag{36}$$

и

$$(1-x)^m-C_{2m}^2(1-x)^{m-1}x+C_{2m}^4(1-x)^{m-2}x^2-\ldots+(-1)^m C_{2m}^{2m}x^m=0 \tag{37}$$

имеют корни

$$\sin^2\frac{2k\pi}{4m},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1 \tag{38}$$

и, соответственно,

$$\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{4m},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m. \tag{39}$$

Найдём произведения корней этих уравнений. Коэффициенты при старших членах уравнений здесь равны

$$(-1)^{m-1}\{C_{2m}^1+C_{2m}^3+\ldots+C_{2m}^{2m-1}\}=(-1)^{m-1}A$$

и

$$(-1)^m\{1+C_{2m}^2+C_{2m}^4+\ldots+C_{2m}^{2m}\}=(-1)^m B.$$

Разложив по формуле бинома Ньютона выражения $(1+1)^{2m}$ и $(1-1)^{2m}$, легко найдём, что

$$A+B=2^{2m},\quad A-B=0;$$

следовательно, $A=B=2^{2m-1}$. Таким образом, убеждаемся, что интересующие нас коэффициенты равны $(-1)^{m-1}2^{2m-1}$ и $(-1)^m 2^{2m-1}$; отсюда по формуле для произведения корней уравнения находим:

$$\sin^2\frac{2\pi}{4m}\sin^2\frac{4\pi}{4m}\sin^2\frac{6\pi}{4m}\ldots\sin^2\frac{(2m-2)\pi}{4m}=\frac{C_{2m}^1}{2^{2m-1}}=\frac{m}{2^{2m-2}} \tag{40}$$

и

$$\sin^2\frac{\pi}{4m}\sin^2\frac{3\pi}{4m}\sin^2\frac{5\pi}{4m}\ldots\sin^2\frac{(2m-1)\pi}{4m}=\frac{1}{2^{2m-1}}. \tag{41}$$

Составим теперь следующие два выражения, закон образования которых подсказывается формулой Валлиса (1):

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{4m}}{\sin\frac{\pi}{4m}}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{5\pi}{4m}}\cdots\frac{\sin\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-3)\pi}{4m}}\cdot\frac{\sin\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}} \tag{42}$$

и

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{5\pi}{4m}}\cdot\frac{\sin\frac{6\pi}{4m}}{\sin\frac{5\pi}{4m}}\cdots\frac{\sin\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\cdot\frac{\sin\frac{2m\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}}. \tag{43}$$

В силу формул (40) и (41) эти выражения равны $2m\cdot\sin\frac{\pi}{4m}\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}=$ $=2m\sin\frac{\pi}{4m}\cos\frac{\pi}{4m}=m\sin\frac{\pi}{2m}$ и, соответственно, $2m\cdot\frac{\sin^2\frac{\pi}{4m}}{\sin\frac{2\pi}{4m}}\cdot\sin\frac{2m\pi}{4m}=$

$$=\frac{2m\sin^2\frac{\pi}{4m}}{2\sin\frac{\pi}{4m}\cos\frac{\pi}{4m}}\cdot1=m\operatorname{tg}\frac{\pi}{4m}.$$

Докажем теперь, что выражение (42) только уменьшится, если заменить синусы углов самими углами, а выражение (43) увеличится. Воспользуемся тем, что

$$\sin^2 k\alpha-\sin^2\alpha=\sin(k-1)\alpha\cdot\sin(k+1)\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\sin(k-1)\alpha}{\sin k\alpha}\cdot\frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin k\alpha}=\frac{\sin^2 k\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2 k\alpha}=1-\left(\frac{\sin\alpha}{\sin k\alpha}\right)^2, \tag{44}$$

в то время как

$$\frac{(k-1)\alpha}{k\alpha}\cdot\frac{(k+1)\alpha}{k\alpha}=\frac{(k^2-1)\alpha^2}{(k\alpha)^2}=1-\left(\frac{\alpha}{k\alpha}\right)^2. \tag{45}$$

Но в пределах первой четверти функция $\frac{\sin x}{x}$ — убывающая (это следует из того, что $\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}\cdot(x-\operatorname{tg}x)<0$, но может быть также легко доказано из геометрических соображений аналогично обыкновенному доказательству неравенств $\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha$; см., например, книгу Д. О. Шклярский и др., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. I, М. — Л., Гостехиздат, 1950, решение задачи 102 г). Таким образом, при $0<k\alpha<\frac{\pi}{2}$ имеем:

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin k\alpha}{k\alpha},\quad \frac{\sin\alpha}{\sin k\alpha}>\frac{\alpha}{k\alpha},$$

и следовательно,

$$\frac{\sin(k-1)\alpha}{\sin k\alpha}\cdot\frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin k\alpha}<\frac{(k-1)\alpha}{k\alpha}\cdot\frac{(k+1)\alpha}{k\alpha}. \tag{46}$$

Теперь мы видим, что если заменять в выражении (43) последовательно каждую пару отношений синусов отношениями соответствующих углов, то выражение (43) увеличится, а если производить такую замену в выражении (42), то оно уменьшится.

Итак мы получаем:

$$\frac{\frac{2\pi}{4m}}{\frac{\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{2\pi}{4m}}{\frac{3\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{4\pi}{4m}}{\frac{3\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{4\pi}{4m}}{\frac{5\pi}{4m}}\cdots\frac{\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\frac{(2m-3)\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\frac{(2m-1)\pi}{4m}}<m\sin\frac{\pi}{2m} \tag{47}$$

и

$$\frac{\frac{2\pi}{4m}}{\frac{3\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{4\pi}{4m}}{\frac{3\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{4\pi}{4m}}{\frac{5\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{6\pi}{4m}}{\frac{5\pi}{4m}}\cdots\frac{\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{2m\pi}{4m}}{\frac{(2m-1)\pi}{4m}}>m\operatorname{tg}\frac{\pi}{4m}. \tag{48}$$

Неравенства (47) и (48) можно объединить в одно двойное неравенство

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}>\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-3}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}>\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2m}\right)\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4m}}{\frac{\pi}{4m}}. \tag{49}$$

При $m\to\infty$ отсюда получаем формулу Валлиса (1).

Аналогично можно вывести и ряд других формул, выражающих число π в виде бесконечного произведения, как, например:

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdots=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \tag{50}$$

$$\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{18}{19}\cdots=\frac{\pi}{3} \tag{51}$$

и т. д.

Поступило в редакцию 11 февраля 1953 г.