



De volgende avond komt er, terwijl het hotel nog steeds bomvol zit, een bus voorrijden. Daarin zitten (aftelbaar) oneindig veel toeristen, die ook graag allemaal een slaapplek in het hotel willen. Ook deze keer is de manager inventief: “Laat de huidige gasten opschuiven naar een kamer met een nummer dat 2 maal zo groot is als hun huidige kamernummer. Dus de persoon van kamer 1 gaat naar 2, die in 2 naar 4, die in 3 naar 6, enzovoorts. Zo komt een oneindig aantal kamers (met een oneven kamernummer) vrij en kunnen alle toeristen in de bus bij ons terecht.” Zo gezegd, zo gedaan, iedereen tevreden (al zal er wel wat gemopperd zijn over al die verhuizingen): $\infty + \infty = \infty$.

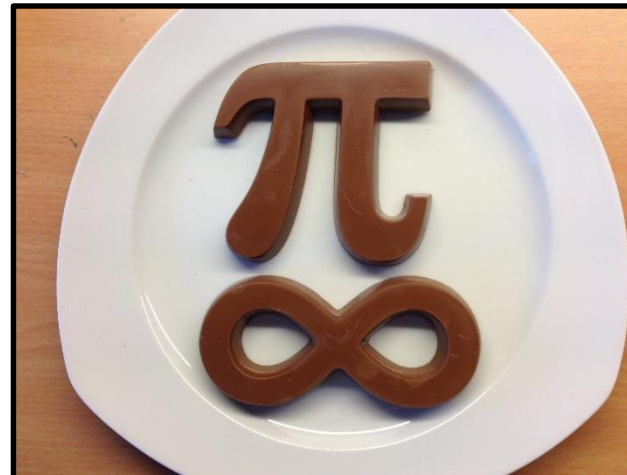
Het kan nog gekker: als er de volgende avond nu eens (aftelbaar) oneindig veel bussen komen voorrijden, elk met (aftelbaar) oneindig veel toeristen? Als u de hotelmanager was, wist u dan iedereen te huisvesten?

Tot zo ver deze inleiding, om u nieuwsgierig te maken. Op mijn webstek (<http://hanswisbrun.nl>) vindt u meer. Of kunt u hier nog geen chocola van maken? Ik wel!

- Wat?** Wiskunde & chocoladeletters
- Voor wie?** Wiskundeliefhebbers én wiskundehaters
- Chocolade?** Melkchocolade van *Barry Callebaut*
- Type?** Dit seizoen: onze *Infinity* en *Choco-pi*
- Prijs** € 9,50
- Waar?** <http://hanswisbrun.nl/winkel/>
- Meer?** Typ *Infinity* in zoekveld van de webstek
- Contact?** wisc001@xs4all.nl



Oneindig
een inleiding
voor absolute leken



Hans Wisbrun



“Ik houd oneindig veel van je.”

“Wat voor soort oneindig bedoel je eigenlijk, schat?
Aftelbaar oneindig of overaftelbaar?”

Het zal u duidelijk zijn dat de tweede spreker vermoedelijk een *wiskundige* is.

Oneindig is een woord dat vaak in het spraakgebruik opduikt zonder dat de gebruiker ervan beseft wat hij of zij nu eigenlijk precies zegt. “Het heelal is oneindig groot.” en “Moleculen zijn oneindig klein.”, zijn uitspraken waarin dat oneindig staat voor *onvoorstelbaar*. Mensen hebben oneindig veel moeite met grote aantallen en zodra het hen wat te groot wordt, wordt het woord oneindig (Engels: *Infinity*; symbool: ∞ , de lemniscaat) maar van stal gehaald.

Oneindig in de Wiskunde

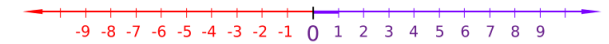
Het is eigenlijk pas vrij recent dat wiskundigen zich op de precieze betekenis van dat oneindig hebben gestort. Een naam die in dit verband als eerste moet worden genoemd is die van *Georg Cantor* (1845- 1918). In de tweede helft van zijn leven werd deze geplaagd door depressies en paranoia en de mythe wil dat dat veroorzaakt werd door al dat gepieker over oneindig.

Iedereen heeft wel een intuïtief idee van wat een *eindige* verzameling is. Alle verzamelingen in uw bezit, uw cd-collectie, die van uw - al dan niet modieuze - schoenen, uw postzegels, het zijn allemaal *eindige* verzamelingen.

Maar wat is een *oneindige* verzameling? Begint u maar eens met tellen: 1, 2, 3, enzovoorts. Als u klaar bent, hoor ik het wel! Dat wil zeggen: ik hoor nu nooit meer van u, deze telrij vormt een *oneindige* verzameling.

Verschillende soorten oneindig

Er zijn - en dat zal u misschien verrassen – echter verschillende soorten oneindig: een oneindige verzameling kan *aftelbaar* zijn of *overaftelbaar*. Van de eerste soort staat hierboven al een voorbeeld, de telrij: je kunt alle elementen van de verzameling een nummertje meegeven. Dat geldt bijvoorbeeld niet voor



de verzameling van alle punten op een *getallenlijn*. Die verzameling is niet aftelbaar of *overaftelbaar*: er is geen telprocedure waarmee ieder getal een nummertje kan krijgen. Ook als we ons beperken tot alle punten op de lijn tussen 0 en 1, de verzameling is niet aftelbaar.

Paradoxen: Hilbert's Hotel



Hilbert's Hotel (dit is een gedachten-experiment) telt een (aftelbaar) oneindig aantal kamers. Het hotel

zit op een zekere avond helemaal vol, alle kamers zijn bezet, dus zijn er ook oneindig veel gasten.

Nog net voor de receptie sluit arriveert er echter nog een gast. De receptionist zegt: “Sorry, we zitten helemaal vol, er is geen plaats meer.” Maar dan grijpt de manager in, met een voorstel: “Laat elke gast nu naar een andere kamer verhuizen waarvan het kamernummer 1 hoger is dan het kamernummer dat hij had. Dus de gast in kamer 1 gaat naar kamer 2, de gast in kamer 2 gaat naar 3, enzovoorts. Kamer 1 komt zo vrij en de nieuwe gast kan daar terecht.” Zo gezegd, zo gedaan, probleem opgelost: $\infty + 1 = \infty$.